Растко Вуковић

ДЕЈСТВО ИНФОРМАЦИЈЕ

енергија, време и комуникација

издавач

Економски институт Бања Лука, 2021.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна и универзитетска библиотека
Републике Српске, Бања Лука

519.72(0.034.2)

ВУКОВИЋ, Растко, 1957-
Дејство информације : енергија, време и комуникација / Растко Вуковић. - Онлајн изд. - Ел. публикација. - Бања Лука : Економски институт, 2021. - 148 стр. : граф. прикази

Начин приступа (URL):
https://www.scribd.com/document/440746867/Dejstvo-informacije. - Насл. са насл. екрана. - Опис извора дана 11.5.2021. - Слика аутора. - Текст ћир. и лат. - Напомене уз текст. - Библиографија: стр. 141-142. - Регистар.

ISBN 978-99938-854-8-1

COBISS.RS-ID 132474369

Растко Вуковић
ДЕЈСТВО ИНФОРМАЦИЈЕ – енергија, време и комуникација

https://www.scribd.com/document/440746867/Dejstvo-informacije

Текст сам писао од децембра 2019. године до септембра 2020.

Рецензенти:
Душко Милинчић, проф. информатике
Александра Радић, проф. физике

Rough translation into English:

Rastko Vuković
ACTION of INFORMATION – energy, time and communication

https://www.scribd.com/document/463637180/Action-of-Information

Предговор

Новије идеје као да намерно објављујеш на лошијим местима, приметићу – пита ме недавно један колега – зар то није мало уврнуто?

Шта друго него се насмејати – рекох – али ниси далеко од истине! Школовани људи су обучени да врте туђа и наводна знања. Тешки су за оригиналности, а тешко је до оригиналности. Рејтинг места и институције њихов су терен, па можда и не грешим када се од таквих суздржавам.

Текст који следи скоро идентичан остављен је „неприметно“ на интернету (Scribid) децембра 2019. године и његови популарни делови су излазили у колумни новина (портала `http://izvor.ba/`) из седмице у седмицу месецима касније. То сам смео урадити очекујући да они којих се ови текстови тичу пре верују званичницима него себи. Позната је „тајна“ савремених система образовања подбачај у креативности и пребачај наводне памети њихових производа.

Вредност самог знања и оних који их уче не треба подцењивати и то је то. Они су циљ ових расправа, само што је тајминг мало промењен. Не очекујем да ови текстови буду тренутно схваћени, а онда када (ако) буду надам се да неће постати идеологија. Разочаравајуће би било да теорија о свету чија суштина је информација и информацији чија суштина је непредвидљивост, дакле једна теорија анти-догма, постане догма.

Аутор, маја 2020.

Sadržaj

1 Популарне приче **9**

1.1 Животни циклус . . . 10
1.2 Стокхолмски синдром . . . 11
1.3 Релације неодређености . . . 12
1.4 Потенцијална енергија . . . 14
1.5 Квантна стања и процеси . . . 16
1.6 Селективност . . . 18
1.7 Дуализам лажи . . . 20
1.8 Гибсов парадокс I . . . 21
1.9 Хамилтонијан . . . 23
1.10 Белова неједнакост . . . 25
1.11 Паулијев принцип . . . 26
1.12 Глобализација . . . 28
1.13 Разноврсност . . . 30
1.14 Расподеле . . . 32
1.15 Непокретна тачка . . . 33
1.16 Демократија . . . 35
1.17 Садашњост . . . 37
1.18 Количина опција . . . 39
1.19 Токови догађаја . . . 40
1.20 Дихотомија . . . 42
1.21 Фикција . . . 44
1.22 Светлост . . . 45
1.23 Гравитација . . . 47
1.24 Много светова . . . 49
1.25 Меморија простора . . . 50
1.26 Шум канала . . . 52
1.27 Гравитон . . . 54
1.28 Ауторитет . . . 55
1.29 Прекретница . . . 57
1.30 Одложена гравитација . . . 59
1.30.1 Комуникација . . . 59
1.30.2 Ентропија . . . 59
1.30.3 Димензије . . . 60
1.30.4 Други ефекти . . . 61
1.30.5 Епилог . . . 62
1.31 Околина . . . 62

1.32 Адхеренција . . . 64

2 Формализам **67**
2.1 Векторски простор . . . 68
2.2 Унитарни простор . . . 69
2.2.1 Информација перцепције . . . 70
2.2.2 Шварцова неједнакост . . . 71
2.2.3 Нормиран простор . . . 72
2.2.4 Ортонормирање вектора . . . 73
2.2.5 Пројекција вектора . . . 74
2.3 Метрички простор . . . 76
2.3.1 Затворени и отворени скупови . . . 76
2.3.2 Околина скупа . . . 77
2.3.3 Тачка нагомилавања . . . 78
2.3.4 Свугде густ скуп . . . 79
2.3.5 Конексан простор . . . 79
2.3.6 Канторов скуп . . . 80
2.3.7 Реална права . . . 81
2.3.8 Сеперабилан простор . . . 82
2.3.9 Низови тачака . . . 82
2.3.10 Комплетан простор . . . 84
2.3.11 Лимес низа . . . 84
2.3.12 Банахов став . . . 85
2.4 Потенцијал . . . 87
2.4.1 Њутнов закон гравитације . . . 88
2.4.2 Моменти . . . 89
2.4.3 Потенцијална енергија . . . 90
2.4.4 Псеудоскаларни производ . . . 91
2.4.5 Примери множења . . . 92
2.4.6 Поопштавање . . . 93
2.4.7 Потенцијал информације . . . 95
2.5 Комбиноване сопствене вредности . . . 96
2.5.1 Спектар оператора . . . 97
2.5.2 Својствени вектори у корацима . . . 99
2.5.3 Пример линеарних система . . . 101
2.5.4 Оператори квантне механике . . . 103
2.5.5 Ротације . . . 105
2.6 Примери сопствених вредности . . . 108
2.6.1 Стојећи таласи . . . 109
2.6.2 Честица у кутији . . . 111
2.6.3 Тунел ефекат . . . 113
2.6.4 Матрична форма . . . 115
2.6.5 Лествични оператори . . . 117
2.7 Друга квантизација . . . 119
2.7.1 Гибсов парадокс II . . . 119
2.7.2 Неразлучивост . . . 121
2.7.3 Фокови простори . . . 123
2.8 Факторизација матрице . . . 127

3 Додатак **131**
3.1 O začetnicima informacione paradigme 131
3.1.1 Ko su „digitalni filozofi“? 132
3.1.2 Fredkinove ideje o fizici 133
3.1.3 Fredkinova nova kosmogonija 134
3.2 Квантни компјутери – двије стране новчића 137

Bibliografija **141**

Indeks **143**

Glava 1

Популарне приче

Увод

Већ у децембру 2019. године било је јасно да имам превише тема за „Минимализам информације", књиге [2], али такође да вишак неће стати ни под капу „Дејства информације". Процена је била да тада спремљених 20-ак популарних прича о информацији могу у седмичном објављивању колумне „izvor.ba" добацити до око маја 2020. године и да ће их се у међувремену појавити још толико, а тако и би.

Иако је сама „теорија информације" (моја) принципијелно веома једноставна, она се заснива на неизвесности неких природних појава и укључује законе одржања и минимализма „количине података", испоставља се да је преширока за саму физику. Жао би ми било не указати на њене последице у друштвеним појавама, а не бих волео пропустити нити „информатичко" објашњење неких данас наводно необјашњивих феномена физике, пре свега квантне, затим космолошке, а онда и класичне. Затим су ту и питања ревизија можда неких заблуда науке, тако да „централне" теме (које сам имао у виду на почетку) никако да постану текуће.

Ово је књига о дејству информације замишљана у суочавању појмова енергије и времена са начелима неизвесности, са окосницом, рецимо, Хигсовим бозоном и осталим пољима тзв. основних сила физике, али са развојем ових популарних прича и њиховим колико-толико праћењем математиком, додаваном у другом поглављу, она се развијала у увод увода у своје главне идеје. Иако сам док ово пишем тек на 18. причи јасно ми је да ће их у књизи бити још толико и да нећу стићи до задате поенте.

Штета би било пропустити популарне описе важних споредних резултата ове нове теорије, нарочито данас када јаз између егзактних и друштвених наука постаје све већи. Није реткост срести се са филозофом који би тврдио да математика на путу друштвених појава нема шта да тражи. Питао бих, значи, ни информатика није нешто што би се могло имплементирати у социјалном, а онда је тек јерес што теорија вероватноће након Колмогорова постаде граном математике?

Другачија врста проблема стиже из самих наука. Занимљиво је, на пример, да се дефиниција ентропије ($S = Q/T$) какву преузимамо из Клаузијусовог израза (1855), као количника топлотне енергије (топлоте Q) и температуре (T), показује мање добра од „генералисане ентропије" из мојих прилога а која је хипотетичка и спекулативна идеја заснована на „начелима информације". Сазнања могу у заблудама имати и непријатеље и савезнике, али верујем да победа истине долази са темељитом припремом и поставкама без журбе. То пре свега јер је њено откриће увек неко изненађење.

1.1 Животни циклус

Успон и пад сваке од око тридесетак познатих водећих цивилизација праћен је, између осталог, развојем неког облика система *права*.

На почетку, у фази младости, друштво има свеже норме понашања које се временом допуњавају развијајући и стабилизујући систем. Након зрелости оне се усложњавају док заједница успорава и застарева. Време старости је када поправке правосуђа додатним ограничавањима не помажу као некада. Сличан концепт важи за многе *животне циклусе* – од фирми до живих бића – а лако се надовезује на теорију информације.

Овде нећу навести типичне примере *цивилизација* (као раније) да нас дедукција из историје и статистиком не би завела. Са открићем идем обрнуто – теорија препознаје чињенице, а ако је добра, редефинисаће оне које се „не уклапају“ и предвиђати изузетке. Ништа испод тога.

Велика цивилизација била је древна Кина два и више векова пре нове ере – по изумима компаса и барута, прављења папира и штампања, посматрања комета и помрачења Сунца. Они су мерили време сенкама, развијали оружја (самострел) и постајали изнутра сигурнија и уређенија држава.

Истраживачима преимперијалног и империјалног периода Кине позната је традиција растуће заштите личних права, имовине, уговора, породичних односа и наслеђа. Она подсећа на Римску Републику и њен каснији империјални период обогаћивања Закона дванаест таблица, у првом периоду непромењљивог.

Древни Египћани били су нарочито успешни у подручју математике, архитектуре и медицине. Стигли су далеко испред свог времена у погледу родне равноправности – мушкарци и жене (осим робова) сматрани су једнаким пред законом. Од око 170 фараона шест су биле жене, прва Собекнеферу, а последња Клеопатра.

Њихов легални систем засниван је на „хармонији почетка времена“ (ma'at) – да треба бити у миру са собом, друштвом и боговима, а прекршиоци су често окрутно кажњавани. Судије су, као и данас, били људи сматрани експертима у том подручју, судови су вагали налазе о прекршају, а полиција је силом приводила прекршиоце, али на врху је био краљ (фараон). Ранији прописи једноставнији су да би се касније умножавали, резултирајући растућом бирократијом, претераним лажним сведочењима и губитком вере у концепт.

Цивилизација Инка, на месту данашњег Перуа, градила је софистициране и обимне путеве, као и веома строге и оштре законе полазећи од три основна сета: „Ama Sua, Ama Llulla, Ama Quella“ (не кради, не лажи, не буди лењ). Овим и законима за одржавање моралног и дисциплинованог друштва у царству Инка утезана је социјална стабилност. Влада Инка промовисала је мир међу својим грађанима, а када би какав злочин био извршен казне су биле немилосрдне.

Поенту ове приче неће оспорити ни лошији примери од наведених, нити случајеви прекида цивилизације због несреће. Главно је да из шкртарења дејством може настати вишак, а из вишка живот током којег се смењују ризик и ред.

Информација је *количина могућности* чиме је она блиска појмовима слободе и права. Крајњи аспекти те мере су неизвесности и исходи, а принципи су одржање и штедња. Инертност и начело минимализма информацију доводи у везу са физичким дејством. Неке њихове последице добро су познате физици (одбијање и преламање светлости, кретање трајекторијама у пољу силе), друге су мање познате (спонтан раст ентропије), а овде циљане (тежња ка сигурности, неделовању и јачању правне државе) непознате су као такве.

Право чине ограничавања. Одузимањем једних опција расту вероватноће осталих, то нас усмерава. Привлачност уходаности подсећа на железнице, ходу воза по шинама по контролисаној пажњи и деловању лишеном потребе за болним изненађењима. Правна држава нас награђује сигурношћу и ефикасношћу и „слатким“ осећајем живљења без ризика, наглих промена енергије, силе и агресије. Тражећи заштиту од државе заправо тежимо стању мање креативности, мање одговорности, предајемо јој своје слободе „на чување“. Преносећи своју животност и памет кроз прописе, заваравамо се да околина може стајати или да је наша побољшана организација може увек надвладати.

Међутим, правни организам сазревањем застарева. Околина црпи предности нама забрањених опција и иде даље на начине крутом телу незамисливе. У природи информације је *непредвидљивост* чију моћ видимо као оригиналност и дрскост уљеза.

Са све боље уходаним забранама заједница тоне у своје *спреге* зато што оне имају веће вероватноће (fidelity). Вероватније се догађа чешће, оно носи мању информацију и мањег је дејства, па удруживања „спонтано“ еволуирају ка таквима. Оно постаје лепак удруживања. Тај ход у уређеност, у слободнијем окружењу, прави је жртвом. Некада велика цивилизација на крају постаје сапета, жртва одважних или болесник којем треба вањска помоћ.

Крути стари систем не признаје или не види друге оптимуме слободних опција. Док он напредује у фази диктатуре, са смањеним поверењем у истину и слободу, тврдоглаво је слеп на мноштва попут биолошких врста једнако добро адаптираних на исту природну средину. Многе *биолошке врсте* својим сопственим перцепцијама посебно су везане за заједничко тло. Даљем нагомилавању забрана и државне присиле следи распад. Оне су ипак вештачке и неприродне, пркосе истини, зато се пуне грешкама и отуђују од почетних идеала.

Правни организам сазревањем застарева
`http://izvor.ba/`
31. јануара 2020.

1.2 Стокхолмски синдром

Стокхолмски синдром је психолошко стање повезаности отетих и отимача. Израз је први пут употребио *Бејерот*[1] после заробљавања четири особе током неуспеле пљачке банке на Нормалмсторгу у Стокхолму од 23 до 28. августа 1973. године.

Таоци су се емоционално везали за разбојнике и после су правдали њихове поступке. Касније, у време судског процеса, они су нерадо говорили о том догађају.

Занемаримо за сада сва друга позната и непозната објашњења, па размотримо слична стања или процесе са становишта информације перцепције и вероватноћа. Узмимо да имамо два субјекта, лице и ситуацију, са низом догађаја које вреднујемо свако на свој начин.

Вредности су, на пример, способности лица да се носи са датим догађајима и способности ситуације да их у томе усмерава/ограничава. Производ способности и одговарајућег ограничења над истом перцепцијом је слобода, а збир свих слобода – информација перцепције.

Аналогна овоме је „спрега шанси“. Обе су скаларни производи вектора на истом простору догађаја и стога са једнаким бројем компоненти – прве информација, а друге

[1] Nils Bejerot (1921-1988), шведски психијатар и криминолог.

вероватноћа исхода. *Производ расподела* вероватноћа неки је број, од нуле до један, највећи када се са већом компонентом првог множи већа другог, односно са мањом мања. У супротном случају, растућег низа компоненти првог вектора, а опадајућих другог, тај производ је минималан.

Информација је логаритам вероватноће, а спреге шанси као и перцепција имају заједничку форму и утолико интересантније интерпретације. Већи *скаларни производ*, већа спрега значи усклађеније векторе. Они су тада „паралелнији“, способности су усмереније ограничењима. Боља адаптираност лица на окружење привидно повећава укупну слободу; искључивање дела могућности фокусира нас на оно што смемо и ослобађа нас вишка труда.

Да бисмо ово још боље разумели присетимо се да је информација дејство и да за физичка дејства вреди начело минимализма. Избегавамо непознато не само због страха, можда и урођеног, него и због отпора према напору и зато волимо ред и сигурност, а ефикасност лако бркамо са креативношћу. Са друге стране, неизвесности и окружења су нам неизбежни.

У каквом год стању да је лице, оно је негде. Способности су пластичне и покушаће се адаптирати на неко од понуђених ограничења, на овај или онај начин, са овим или оним секундарним разлогом иза којих заправо стоји принципијелна тежња природе да реализује већу вероватноћу, односно мању (стварну) информацију.

Када имамо моћ причаћемо около о миру да бисмо стекли више моћи знајући да је свако заробљеник неких хијерархија. Везује нас привид слободе да бирамо оно што ће нама доминирати, а што се често сведе на бирање да бирање избегнемо.

Животи микро-честица нису другачији. Тумачимо их једнако користећи претходне „слободе“ или њихове експоненте који су „шансе“. У квантној механици шансе дефинишу суперпозицију датог квантног стања (честица), можемо рећи расподелу вероватноћа. Два квантна стања су у спрези чији интензитет (усклађеност стања) мери скаларни производ њихових расподела. Тај производ узима вредности вероватноћа, од нуле до један, при чему већој вредности припада изгледније спрезање.

Ма о каквом квантном стању да говоримо, оно је увек у неком окружењу. Аналогно важи за процесе који су такође вектори тзв. дуалног простора стања. Склоност стања (процеса) за удруживање расте са скаларним производом, а њихова „пробирљивост“ делом је детерминистичка, а делом стохастичка, прво због нужности теорема, а друго због случајности појава на које се оне односе.

Невероватно је, али у дејству информације налази се исти дубоки узрок који нас чини подређенима, због којег се интернетом лажи шире брже од истине, због чега је лакше кодирати него декодирати или који Земљу држи у орбити око Сунца, а електрон везаним у атому.

Лице и ситуација
`http://izvor.ba/`
7. фебруара 2020.

1.3 Релације неодређености

Хајзенбергове[2] релације неодређености (1927) једно су од најважнијих открића квантне механике и можда једна од најутицајнијих новијих идеја.

[2] Werner Heisenberg (1901-1976), немачки теоријски физичар.

Оне су откривене „посматрањем“ честице кроз замишљени микроскоп за чије тачније одређивање положаја узимамо фотоне (светлост, електромагнетно зрачење) краћих таласних дужина, али зато са већим импулсом и преносом више његове неодређености у судар. Рачун показује да ред величине производа неодређености положаја и импулса посматране честице није мањи од *Планкове*[3] константе, *кванта* дејства.

Светлост (електромагнетни талас) има енергију која множена трајањем једне осцилације даје Планкову константу, па је истог реда величине и производ неодређености енергије и трајања. У простор-времену импулс и енергија чине четири координате, одговарајуће дужини, ширини, висини и времену потребном да светлост пређе одређени пут.

Везу између кванта дејства и информације илуструје познати пример *дигиталних записа* слике и филма. На датој магнетној меморији слика је онолико оштрија колико пута је покрет мање детаљан. Детаљ слике (пиксел) пропорционалан је дужини, а импулс брзини.

Апсурдно је, али дубљи узроци неизвесности крију се у извесности, прецизније речено у зависности случајних догађаја. Није могуће променити импулс честице без промене њеног положаја и обрнуто, а такође нема ни тренутне промене енергије нити време може тећи без њених размена. То даље значи да су импулс и положај зависне величине, оне се тако узајамно допуњавају да промена прве па друге није једнака промени друге па прве.

Зависне процесе представљају *некомутативни* оператори, независне комутативни. Квантне еволуције прате посебне линеарне функције за које из алгебре знамо да им композиције обично нису комутативне. На пример, удвостручење броја и додавање јединице: удвостручен број три па увећан за један даје седам, али три увећано за један па онда удвостручено је осам. Сличну некомутативност пресликавања имају зависни квантни процеси и само они.

Еквивалент копирања вектора (унитарним) оператором је промена квантног стања. У Хајзенберговом зависном квантном развоју промена импулса па промена положаја даје другачији резултат од промене положаја па импулса. Разлика две композиције одговара кванту дејства, сада кажемо кванту информације. Део тих тајни откриван је током 20. века.

Када радимо уопште са некомутативним операторима квантне физике тада говоримо о *принципу неодређености.* Разлика која би настала различитим редоследом активности два зависна процеса је нека *недељива* величина. То је опет у складу са коначном дељивошћу сваког својства информације, а оно са законом одржања информације, насупрот бесконачнм скуповима који могу бити своји прави делови.

Ради се о дубљим узроцима квантовања информације и дејства. Зато су и сви правни прописи, правила нормалних игара, закони друштвених и природних наука као и математике увек дискретни скупови. Тим ставом смо већ у мом додатку квантној теорији.

Инсистирамо ли на томе да је дејство производ импулса и дужине (енергије и времена), да информација преноси дејство, а да је она основни и једини састојак простора, времена и материје, онда тврдимо да се сваки пар некомутативних физичких оператора може свести на врсту пресликавања положаја и импулса. Евентуално да је појам „информације“ сложенији него што се на први поглед чини или да сам негде у овим генерализацијама претерао.

[3]Max Planck (1858-1947), немачки теоријски физичар.

Свеједно, стања и процеси увек су неке „честице“, јер су и оператори вектори дуални стањима на која делују. Доследно главној горњој тези, само оне честице које могу комуницирати делују једне на друге, а паровима таквих придружујемо некомутативне операторе. Првој онда припада простор, другој супстанца, што грубо речено значи да их репрезентују неке врсте оператора „положаја“ и „импулса“, свака на свој начин.

Чудно је, али то се слаже са у физици познатом поделом *елементарних честица* на бозоне и фермионе. Прве су толерантне попут фотона, исте могу заузимати иста стања. Друге су нетолерантне као електрони за које важи *Паулијев принцип искључења*: два иста фермиона не могу бити у истом квантном стању.

Овде бозони не комуницирају са бозонима непосредно нити фермиони са фермионима, што би требало проверавати заједно са предвиђањем да само неки бозони комуницирају са неким фермионима. Да неки бозони (рецимо фотони) граде поља сила на која су осетљиви одговарајући фермиони (електрони, протони) познато је.

Тако једноставна подела елементарних честица према деловању, на бозоне и фермионе, обзиром на различитости и многострукости које су у природи саме информације, говори нам да би они требали бити пакети, евентуално тако апстрактних делова да их није могуће физички распаковати.

Други правац развоја принципа неодређености могао би ићи ка информацији перцепције. На пример, способности слободе тумачене импулсивношћу, а ограничења просторношћу. Таласну дужину већ сматрамо неодређеношћу положаја а само корак одатле је информација.

Што је неодређеност положаја мања, вероватније је налажење честице на датом месту, а онда је мања информација места. Тако Хајзенбергове релације неодређености говоре о информацији перцепције, а затим и дуално о множењу расподела.

А можда сам све ово претерао?
`http://izvor.ba/`
21. фебруара 2020.

1.4 Потенцијална енергија

Потенцијална енергија је она коју објекат има својим положајем у односу на неки други објекат. Да бисмо подигли предмет на ормар улажемо неку енегију, али је добијамо назад пуштајући тело да пада.

Дижући предмет вршимо рад и зато говоримо о ускладиштеној енергији. Како год, промена енергије трајањем је дејство, физичко дејство које сада тумачимо као информацију. Дакле, причамо о потенцијалу физичке информације.

Два одвојена магнета када се привлаче могу вршити рад. Слично гравитацији, привлачење производи наводно ускладиштену енергију, а заправо дефицитарну потенцијалну која се у складу са законом одржања и принципа најмањег дејства смењује неком другом. Мањак потенцијалне енергије је привлачан, вишак је одбојан.

Према *Хуковом*[4] закону (1676) сила опруге сразмерна је истезању (сабијању) из чега следи да се потенцијална енергија тела закаченог на опругу увећава са квадратом удаљености од нултог, равнотежног положаја. Када се опруга отпусти вишак те енергије се „топи“ и допуњава кинетичком енергијом тако да укупна енергија опруге остаје иста.

[4] Robert Hooke (1635-1703), енглески научник.

Кинетичка енергија, иначе пропорционална половини масе тела и квадрату брзине, расте до равнотежног положаја опруге где сва почетна потенцијална енергија постаје кинетичка. Због инерције, истезање (сабијање) опруге наставља се у сабијање (истезање), а брзина тела успорава до крајње тачке у којој се оно зауставља када сва кинетичка енергија пређе у потенцијалну. Идеална опруга (без трења) идеалан је *хармонијски осцилатор* са периодичним смењивањем енергија које нам, слично периодама ротације планета око Сунца, казује још понешто.

Гравитациони потенцијал тачке обично се дефинише као рад потребан да се јединица масе из бесконачности доведе до дате тачке. Додајем, тело тежи стању мање информације, а убрзава да би задржало дејство. Маса у гравитационом пољу слободно пада, она је за себе у бестежинском стању, али и за друге њена укупна енергија, кинетичка и потенцијална, остаје константна.

Кеплеров[5] други закон (1609) каже да дуж која спаја Сунце и планету пребрише у једнаким временима једнаке површине. Постоји векторски доказ да је то својство сваке константне силе датог извора чији би носиоци (бозони) могли трајати попут фотона или гравитона. Са друге стране, помоћу алгебре комутатора[6] може се доказати да је та површина једнака константном дејству набоја на његовом путу кроз поље силе.

Укратко, замислимо праву линију и тачку ван ње на датој удаљености. Та је тачка извор (нулте) силе, а одсечак дате праве је део путање небеског тела (набоја) током неког интервала времена. Одсечак и извор формирају троугао површине која не зависи од места одсечка на датој правој. Површину затим дефинишемо аналитички.

Троугао је у равни са две координатне осе. Разлику наизменичних производа, прве координате првог темена троугла са другом другог и прве координате другог са првом првог, назовимо *комутатором* пара тачака. Три су таква (оријентисана) пара тачака троугла и три комутатора, а њихов (полу)збир је површина троугла. Уопште, збир комутатора узастопних парова тачака изломљене линије у равни једнак је (полу)површини унутрашњости коју линија ограђује. То је нова ствар (моја) у аналитичкој геометрији, али лако се проверава.

Када је једно теме троугла исходиште система координата, онда је његова двострука површина једнака комутатору преосталог пара темена. Према томе, комутатор је површина!

Ова се лако преписује на векторе и на њихове операторе (векторе дуалне првима), када излази да је комутатор вредност производа Хајзенбергових чувених релација, производ неодређености положаја и импулса, односно енергије и времена. Он је најмање реда величине Планкове константе, кванта дејства, па је комутатор тада и најмања физичка информација.

Тешко је ове формуле препричати, али могу покушати. Константна „Кеплерова површина“ еквивалент је информацији, а она дејству. Све три су дводимензионалне. Оне су пропорционалне површинама концентричних (виртуелних) сфера бозона којима извор силе говори свету о себи, а из односа поменутих површина следи закон кретања.

Тело се кроз *поље силе* креће попут мрава преко препрека. Они се не троше пробијајући површ, него на свој начин следе најкраће путеве, сада кажемо трајекторије најмањег дејства, тј. најмање комуникације. Тако и ми идемо преко брда када нема тунела кроз брдо.

Разне су последице новог гледишта. На пример, *геодезијске линије* нееуклидске

[5] Johannes Kepler (1571-1630), немачки математичар и астроном.

[6] R.V. Potential information `https://www.academia.edu/41986473/`

геометрије и опште теорије релативности изводљиве су из принципа најмањег дејства физике. Идеја о *тамној материји* настала због неслагања теорија гравитације и распореда маса у галаксијама не може се корговати простим „поправљањем“ гравитације. *Њутнова*[7] формула не следи из Кеплеровог другог закона, него из *трећег*: квадрати опходних времена планета пропорционални су кубовима њихових средњих удаљености од Сунца. А то су већ три или четири примера.

Постоје импликације горњег открића и на друштвене појаве. Тежећи да се ослободимо вишка неизвесности, информације која нас иритира непознатим, предајемо своју слободну вољу разним ауторитететима. Подређујући се појединцима, групама, правној држави, ми гравитирамо реду, сигурности, или ефикасности. Избегавајући непријатне опције, лични губитак одлучивања надопуњава се (не увек пријатним) дејством организације којој се предајемо.

Ред, неред и алгебра комутатора
http://izvor.ba/
28. фебруара 2020.

1.5 Квантна стања и процеси

Квантну механику покренуло је *Хајзенбергово* откриће релација неодређености.

Претходили су му успеси *Планковог* квантовања енергије у објашњењу зрачења тамног тела и *Ајнштајнов*[8] фотоелектрични ефекат, *Де Бројево*[9] тумачење честица таласима, *Шредингерова*[10] једначина, а на то све је дошло и откриће тог света као репрезентације апстрактних векторских простора. Квантна физика је искорак даље у остале феномене микрокосмоса.

Вектор је *стање*, а операција која га мења је *процес*. Међутим и процеси су вектори, па рачун кванта постаје интригантнији. Склони смо замишљати честице просторно како се померају временом, раздвајајући њихову статику од динамике и понекад приметити да њихови распореди и њихове промене знају следити сличне образце, али томе можда никада не бисмо дали већи значај да није алгебре квантне механике.

Електрична фаза *фотона* (честица светлости, електромагнетног таласа) периодично се замењује магнетном. Електрицитет и магнетизам наизменично индукују једно друго и у стојећим таласима *електрона* у љускама атома. Такође полуцели позитивни *спин* (унутрашњи магнетни моменат) слободног електрона трансформише се у полуцели негативни емисијом и интеракцијом (виртуелног) фотона јединичног спина са другим електроном ($1/2 - 1 \to -1/2$) да би се затим негативна половина трансформисала у позитивну следећом интеракцијом ($-1/2 + 1 \to 1/2$), сада виртуелног фотона супротног јединичног спина. Овај периодични временски распоред догађаја одговара таласној структури електрона.

Стања остају периодична због периодичних процеса и обрнуто. Деловање процеса на стање видимо и у одржавању импулса, *инертности* тела у кретању. Онако како се дејство преноси кроз простор временом, оно се тако преноси кроз време простором. Тело је тамо где је, јер му је то био највероватнији положај, а онда и непосредно ту

[7] Isaac Newton (1643-1727), енглески математичар.
[8] Albert Einstein (1879-1955), у Немачкој рођен теоријски физичар.
[9] Louis de Broglie (1892-1987), француски физичар.
[10] Erwin Schrödinger (1887-1964), аустријско-ирски физичар.

ће бити због инерције вероватноће[11]. Вероватнији догађаји мање су информативни, мањег дејства и отуда инертност.

Елементарне честице физике су у неким својим променљивим стањима, али оне многе обрни-окрени остају оно што су биле. Промене којима се подвргавају ограничене су у циљевима, потребом да електрон остане електрон, да важе закони одржања и слично, као да упадају само у такве неприлике које им у бити не нашкоде. За честице које бирају поново употребљиве процесе кажемо да се процеси према стањима понашају као стања према процесима. Слично се догађа у стапањима или распадањима честица када различита стања бирају различите процесе.

Дуализам линеарних оператора и вектора на које ти оператори делују гарантује нам да ће замене идеја простора и времена физике бити непротивречне. Зато ћемо наћи и да је овај универзум састављен од једнаког броја временских и просторних *димензија*. Места и трајања једнаки су концепти до изоморфизма, обострано једнозначног пресликавања одговарајућих појмова.

Квантна физика нам даље каже да постигнуће и развој нису само две еквиваленте појаве, него је свака и реципрочна (регуларна, инвертибилна) функција. Она принципијелно дозвољава обртање тока времена, заједно са променом смера пута и набоја. То као да није у складу са статистичком механиком и њеним неповратним разбијањем чаше због једносмерног спонтаног раста *ентропије*, односно са преласком топлоте на хладније тело. Парадокс разрешава шири поглед, са становишта минимализма информације. Колико је то ново становиште шире погледајмо сада на једном примеру економије.

Нека компанија има производњу артикла из три фабрике и доставу ка три продајна центра. Фабрике у јединици времена дају редом 300, 300 и 100 артикала које продају у центрима темпом 200, 200 и 300 комада. Трошкови доставе по јединици артикла из прве фабрике центрима редом су 4, 3, 8, друге фабрике 7, 5, 9, а треће 4, 5, 5. На компанији је питање дистрибуције уз минимални укупни трошак. То је типичан задатак тзв. *линеарног програмирања*.

Има више начина достава, чак и уз услов робе без остатка, али је ово пример са само једим минималним трошком. Прескачем решавање (симплекс метода) да прва фабрика првој и другој продавници треба слати по 200 и 100 комада робе, друга другој и трећој по 100 и 200, трећа само трећој 100. Ако вас ови бројеви не интересују, опет добро, јер поента и није ту.

Замишљамо да је веза између произвођача и потрошача квантни процес који стање робе у производњи преводи у стање робе у продаји. Услов минимизирања трошка одговара принципу информације и принципу најмањег дејства. Први зарађују као магационери или трговци, а други као организатори дистрибуције, први као представници стања, други процеса.

Инверзибилност (свих) квантних оператора значила би да за робу на продајном месту увек можемо тачно знати у којој је фабрици била произведена. Процесом „увек“ у „тачно“ стање. Вектори су оригинал (300,300,100) и копија (200,200,300). Када овакви парови вектора нису једнаки, квантна стања и процеси пре и након могу бити битно другачија. Свеједно, они су и тада фазе неког ширег квантног процеса, овде економије тржишта.

Када су оригинал и копија једнаки вектори, не долази до битне промене квантног стања (атом остаје атом исте врсте) супротно случајевима стапања или распадања

[11] За вероватноћу важи одговарајући закон одржања такође.

честица. Ако не настаје другачији вектор, константа пропорционалности слике и оригинала изражава *обзерваблу* која траје, вероватноћу њеног опажања која је зато реалан број.

Компоненте вектора и коефицијенти у квантном рачуну су и комплексни бројеви. Када они нису реални бројеви тада се микро појаве не дају опажати. Оне се иначе нерадо изјашњавају, као што рекох, због начелног минимализма комуникације.

Три фабрике и три продајна центра
`http://izvor.ba/`
6. марта 2020.

1.6 Селективност

Информатички поглед на свет шири је од филозофије *материјализма*. То је један део ове приче. Остатак су запажања да је и сама материја суптилнија од појмова каквом је доживљавамо и да нас наше перцепције само делимично обавештавају о околини.

Информација се испољава физичким *дејством*, а оно је производ импулса и пута или енергије и трајања. Због закона одржања оба су дискретна (коначно дељива) и опажања ње су нам увек коначна. Међутим, физичка реалност је део бесконачног апстрактног света истина и већ зато су информације селективне и разноврсне.

Када је један од два фактора дејства већи, други је мањи и, у граничном случају свепросторне информације постају безимпулсне, а свевременске су безенергетске, налик универзалним *теоремама* које као да не припадају материјалном свету. Сваки део тако грађене теорије тачан је и сагласан са сваком другим делом те или било које треће тачне теорије (геометрије, алгебре, вероватноће), иако оне могу бити распарчане у безбројне међусобно независне *аксиоме* (Геделова теорема немогућности), селективне и многоструке.

Више супстанцијалне истине мање су апсолутне, на разне начине. Знамо да се *свемир* шири и да су нам границе његовог видљивог дела све даље. Тај феномен у „теорији информације“ (мојој) „може“ настати акумулацијом историје света. Простор памти, јер честица која путује дубинама космоса не гомила се, него простор расте а твари је све мање. Исто произлази из спонтаног раста ентропије супстанце.

Када сиђемо на још мало ниже нивое дејства налазимо опет на мало другачије разноврсности и *селективности информације*. На пример, ми комуницирамо (интерагујемо), јер немамо све што нам треба нити све можемо имати, а онда и не комуницира свако са свачим.

Већа информација долази из веће неизвесности, па је неизвесност пропорционална енергији коју преноси и трајању. Отуда и дезинформација, као и све оно што повећава забуну, може бити енергично и офанзивно. Таква лаж постаје део тактике, средство или оружје у *играма на победу*. Али нису све игре игре на победу. Тактика добит-добит (win-win game) у трговини или тражење компромиса у политици примери су игри добрица.

Супротна мировњачким, била би тактика губитак-губитак (lose-lose game), у шаху гамбит (жртва фигуре за позицију) или у привређивању инвестирање. Скоро свака игра на победу побеђује игру добит-добит и од пресудне је важности заштита „добрица“ од „злоћа“, рецимо за стабилност економије.

Па, ако се о „нечему“ лаже, вероватно је у току неки рат доминација. Гости против домаћих имају „лоше намере“ и зато лажу. Домаћи пак науспрот своје публике,

саучесници или самостални, такође лажу, а када „утакмица“ почне, онда лажу и неки други навијајући за „своје“. А све то сведочи о много лица истине и њеној игри скривања.

Кроз уске прозоре чула видимо таман колико нам треба. Тај минимум комуникације за сопствени опстанак траже све биолошке врсте, а ови затим конвергирају око сличних услова, потреба и сукоба. Принципи информације и најмањег дејства говоре о таквом искључивању.

Шкртарењем се и стиче, а из вишкова физичких дејстава, па онда и са моћи бирања настају и жива бића. Вишка дејства, информације или слободе, када то може, природа се решава. Спонтано и селективно. Около је увек нека средина и ако бирамо, то су радије сигурност, неумарање и сврховитост, примарно због штедљивости акције, а секундарно можда због психологије. Сличним процесима смањивања опција, јединки и друштва, подлежу и конвергенције чула врста.

Нема информације без могућности и има је више што је избора више или што су мање вероватни. Са мањим шансама информације су веће, али су већи и отпори њеним емисијама. Тако су сужавање опажаја и раст животности супротне тежње, што нам говори о нашем незнању и важности оптимума. Верујемо да је свет једноставнији него што јесте због начела информације која заговарамо потребом за безбедношћу, ефикасношћу или умором, а са друге стране често погрешно верујемо да са више нечега добијамо више свега. То је такође селективност.

На још нижем нивоу, посебност пахуља снега, листова дрвећа и свих живих бића уопште, сведоче колико се природа опире напуштању својих мешавина. *Закон одржања* (количине) информације појачава ту сметњу, он додатно отежава смањивање броја опција, сливање свих облика живота у једну врсту, једно друштво, под једну заставу.

У свету још мањих величина, шведски физичар Јоханес *Ридберг* (1888) открио је формулу за предвиђање таласне дужине фотона емитованог променом енергетског нивоа електрона у *атому* помоћу главног *квантног броја* (n). То је природан број и један од четири квантна броја које има сваки електрон у атому. Растући редом он означава више бројеве љуски које су попут концентричних сфера све даље од језгра, које све слабије везују електрон за језгро, што нам поред осталог сада открива и нове врсте селективности информација унутар атома.

Информација се храни изборима, али она ту храну нерадо конзумира. Материјалистичкој *филозофији* та изворна разноврсност није неопходна и она је превиђа, универзум јој је превелик, збуњујуће су јој потребе и обим интеракција. Комуникације као и жива бића материјалистичкој филозофији дођу приде вишак, а простор, време и материја неповезани су јој појмови. Међутим, сви су они ткиво информација и следе њене исте принципе.

Темељ нове филозофије најмање су честице. Као аутентични представници физичке информације, њене непредвидљивости, оне су такође неодређене тако да их није могуће тачно спознати.

Сигурност, неумарање и сврховитост
`http://izvor.ba/`
13. марта 2020.

1.7 Дуализам лажи

Наука прећутно дели реалност на свет истина и свет *лажи*. Први од тих светова божански је, други је ђаволски, рекли би неки, а питање је хоћемо ли икада моћи „нечастивог“ ухватити за рогове. То је тема ове приче. Прво погледајмо један пример мојих колега из Ваљева.

Грађани града А увек говоре истину, грађани града Б увек лажу, а сваки грађанин из града Ц наизменично говори истину и лаж. Дежурни ватрогасац је телефоном примио поруку из једног од ових градова: „Код нас је пожар!“ јавио је један грађанин. „Где?“‘ – питао је дежурни ватрогасац. „У граду Ц“ – одговорио је исти грађанин. У који град треба отићи ватрогасна екипа?

Поменути грађанин није могао бити из града А, јер они стално говоре истину, а две изјаве које је примио ватрогасац не могу обе бити тачне. Он је могао бити из града Б, грађана који само лажу, јер је могао слагати „Код нас је био пожар!“ и затим опет слагати да је он „У граду Ц“, јер пожар је могао бити у А! Грађанин Ц који би наизменично говорио истину и лаж није тим редоследом могао рећи прву па другу изјаву. Такође, није могуће да је прва изјава била лаж (онда пожар није у Ц), а друга истина (пожар је у Ц). Према томе, ватрогасна екипа треба отићи у град А.

Поука овог „задачића“ је да би и свет лажи могао на неки начин бити доследан слично свету истина. Анти-логику тог света појаснићу путем алгебре ирског математичара Џорџа *Була*[12] (1854) у којој су једине вредности променљивих *тачно* и *нетачно*. У применама их представљамо цифрама 1 и 0 или стањем „има струје“ и „нема струје“ у компјутерским процесорима.

У Буловој алгебри се свака формула може написати помоћу три операције: *негације*, *дисјункције* и *конјункције*. Прва преводи вредност „тачно“ у „нетачно“ и обрнуто. Друга и трећа укључују по два исказа; дисјункција им даје вредност „нетачно“ само ако су оба нетачна, а конјункција резултира са „тачно“ само за оба тачна. Преводећи ове у струјне прекидаче могуће је симулирати разне логичке процесе.

Са друге стране, постоји симетрија ове логике. Свака истина као „одраз у огледалу“ има неку неистину и обрнуто, тако да је свет лажи тачно једнако доследан као и свет истина, на свој уврнути анти-начин. На пример, конјункција „А и не-А“ увек је нетачна, она је *контрадикција* и у свету лажи она је врховна вредност. Пресликамо ли је у наводном огледалу испада дисјункција „не-А или А“ која је *таутологија*, исказ увек тачан, врховна вредност света истина.

Дакле, могуће је у самом свету лажи тражити тоталне неистине и затим их изврта-њем (тачно у нетачно и обрнуто) претварати у тоталне истине. Али авај, као што је тешко разумети супстанцу без простора, тешко је налазити истине без лажи или лажи без истина. А то је трећи део ове приче и он се највише тиче „теорије информације“.

Математика је чудо. Није први пут речено да она хода корацима у које нико неће посумњати да би стизала до тврђења у која нико неће поверовати. Тако открисмо да нас и лажи информишу. Оно што бисмо могли доказати да се не може десити – не дешава се. Зато „догађаје“ сматрамо истинама (информације су еквиваленти дејству, а дејства дешавању). Супротни би били „не-догађаји“ (ако постоје) од којих није могуће добити било какву информацију и који су прави еквиваленти неистина. Међутим, такви не могу постојати, барем не у свету у којем је сваки део простора, времена и материје нека информација.

[12] George Boole (1815-1864), енглеско-ирски математичар.

Другим речима, *васиона* у којој живимо садржи само илузију неистина. Она се поиграва са нама, јер истина воли да се крије иако не може да се сакрије. Неизвесности које чине ткиво информације неизбежне су, а природа као да их не воли. То извире из начела информације (које заговарам), њеног минимализма и принципа најмањег дејства (овај други је познат физици).

Природа нема могућност класичног лагања, али има невероватно велике способности игнорисања и скривања. Међу нама најпознатијим су неизјашњавање и смањивање шанси реализације. На скали вероватноћа од нуле (немогућ догађај) до јединице (сигуран догађај), они збијенији догађаји веће информације мање су вероватни и ређе се догађају, они разуђени чешћи су.

Гранични, најгушћи били би немогући догађаји, теоријске неистине, а најређе биле би теоријске истине. Оно што виђамо врло вероватно је негде између. Због принципа информације природа скоро никада не ставља све своје једноставне истине на сто, тако да ће свако ко је превише информисан постати дезинформисан. Природа не дозвољава нити саме лажи, она презасићује и раскринкава и ону другу крајност – стање „сасвим неинформисан“.

Ако су мање шансе догађају да се деси, он је информативнији и више нас „погађа“. На другом крају вероватноћа су догађаји са великом каузалношћу, апстрактни, извесни, слабо информативне вести и мање материјалне. Оне делују на нас једва, а ми на њих никако. Оно што има математичку тачност толико је интелектуално и суптилно као да не припада овом свету, супротност је ономе што би имало крајњу нетачност, што би било претерано силовито информативно, брутално и разорно.

Принцип информације тако иницира принцип дезинформације да једнако како материјални свет не може без макар каквих случајних догађаја и према томе макар неких информација, он не може нити без макар некаквих дезинформација. Одупирући се вишку „истина“ природа има симетричне разлоге да се одупире и вишку „неистина“. Ако много лажете, мало ко ће вам веровати, а ако причате само *истине*, тешко ће вас разумети.

Ако су то само биле лажи...
`http://izvor.ba/`
20. марта 2020.

1.8 Гибсов парадокс I

Као што политичари и историчари редовно помало запостављају значај проналазача у развоју цивилизација, а локални мајстори и инжењери занемарују научна открића, ми сви заједно потцењујемо утицај математике.

Тако су и западне друштвене промене пре два века, због јачања либерализма и индустријске револуције, имале свој дубљи узрок у открићима вероватноће, информације и квантне механике. Познат као француски револуционар, Лазар *Карно* (1753-1823) био је математичар и један од првих који је (апстрактно) истраживао користан рад гасова.

Његов син Сади описао је (1824) кружни процес идеалне топлотне машине која ради на разлици температура водене паре, загрејаног ваздуха или неке треће супстанце. Немачки математичар Рудолф *Клазузијус* (1822–1888) дао је томе још прецизнију форму (1850) и употребио једну касније чувену скраћеницу, количник топлоте и температуре, коју је он назвао *ентропијом*.

Након две деценије амерички научник и математичар Џосаја Вилард *Гибс* (1839-1903) открио је статистичку механику. Он је открио и „информацију“ коју је затим разрадио *Шенон*[13] (1948). Гибс се као и многи научници од Клаузијуса до данас мучио да ентропији да неки физички смисао и у томе је био један од успешнијих.

Приметио је (или је био близу) да ентропија расте разбијањем стакла и расипањем срче, због чега је и данас називамо „количином нереда“, те да слабљење енергетских веза стакла том приликом говори о губитку енергије и информације.

Ово се догађало у сенци *Наполеонових*[14] ратова, борби многих народа за независност, опадања *Османског*[15] царства, *Меиџи*[16] обнове у Јапану, колонизације Африке. Крајем 19. века аустријски физичар Лудвиг *Болцман* (1844-1906) је разрадио статистичку механику на титрајима честица, атома чије комешање даје топлоту и температуру, али он није доживео победу својих идеја које су заживеле тек након *Ајнштајновог* објашњења Брауновог кретања (1905).

Опадање температуре гаса ширењем посуде мучило је и Гибса када је (1875) смислио ситуацију свог чувеног *парадокса ентропије.* Његов мисаони експеримент открива проблем мешања честица гаса које сматрамо различитим у ситуацији где оне то више нису. Разрешење парадокса је (тада апсурдно) третирање честица истог гаса неразличивим, таквима да се при пермутацији (замени места) две честице стање система не мења.

Зашто је „парадоксално“ сматрати једнаким неке делове супстанце, шта то значи „једнакост честица“ и колико далеко са изједначавањем можемо ићи? Тешко је те дилеме данас разумети, али покушаћу објаснити њихову ондашњу тежину на примеру бацања пара истих *новчића.* Сваки од два новчића има две стране, писмо и главу, па исход бацања има четири могућности: ПП, ПГ, ГП, ГГ. Временом, након много понављања, исход ПП је око четвртине свих бацања, па бројећи их сазнајемо и то да смо заиста имали четири равноправне поменуте могућности.

Применимо ово на честице две врсте идеалних гасова одвојене преградом унутар неке изоловане посуде. Нека су то два дела једнаких запремина, притисака и температура. Када уклонимо преграду гасови се мешају и шире по целој посуди, за сваког у двоструко већу запремину. Укупна ентропија је већа, што ће показати како рачун (овде изостављен) тако и чињеница да враћање преграде не раздваја гасове назад, да је то неповратан процес.

Замислимо затим да се у два дела посуде налази исти гас. Уклањањем преграде нема мешања „два гаса“ и ширења у двостуко већу запремину, а враћањем преграде стање постаје почетно. Процес је повратан и примена исте аргументације доводи рачун у контрадицију.

Ствар је у томе да ентропија не примећује замену места „истих“ честица, да такве постоје, те да је за промену енергије и информације посуде тада важан број комбинација а не варијација.

Према томе, ентропија тада није екстензивна величина (пропорционална количини супстанце), па ако она зависи од могућих распореда честица али не и од редоследа истих, онда ће деленье факторијелом броја подела честица (множење фактором 1/N!) у израчунавању ентропије поправити рачун, а то се заиста и десило.

[13] Claude Shannon (1916-2001), амерички математичар.
[14] Napoleone Buonaparte (1769-1821), француски војни лидер, израстао из Револуције.
[15] Османлијско царство, од 1299. до 1923. године.
[16] Меиџи револуција, реформа у Јапану од 1868. до 1889. године.

Решење *Гибсовог парадокса* указује на суптилност ситуација: прве честице у стању А и друге у стању Б и прве честица у стању Б и друге у А. Квантна стања су вектори, композиције су тензорски производи, па је збир (АБ+БА) *симетрично стање*, а разлика (АБ-БА) *антисиметрично*. Симетричне елементарне честице називамо *бозонима*, антисиметричне *фермионима*.

Експерименти показују да постоје само поменуте две врсте елементарних честица, без других бројева осим плус и минус један између парова стања. До истог се долази и теоријски.

На пример, заменом две честице стање бозона се не мења, а стању фермиона мења се предзнак. Два пута ова замена враћа почетно стање, постаје јединични (неутралан) оператор, тј. *унитаран*, какви су сви оператори квантне механике. Они су такви да не би мењали (јединичну) норму суперпозиције квантних стања. Сопствене вредности (сваког од) ових оператора само су плус или минус један, па у ни у сложенијем систему нема мешања бозона са фермионима, јер би суперпозиција дала трећу вредност.

Оператор енергије (хамилтонијан) симетричан је, па су потенцијалне и кинетичке енергије тела у пољима бозонског типа, а према томе оно на шта поље делује је фермионског. Фотони и гравитони су бозони, електрони и протони су фермиони. Ако би стање фермиона садржало две исте честице било би нула (због одузимања), а то се не може нормирати (бити јединичног интензитета) и не може представљати суперпозицију, а отуда оно нема физички смисао.

Зато два фермиона не могу бити у истом квантном стању као што каже *Паулијев принцип искључења*, иначе успешан у објашњењу *Мендељејеве*[17] таблице хемијских елемената.

Тешко је схватити колико је открића хемијске индустрије, енергетике, телекомуникација у последицама ове кратке приче, док се не осврнемо на начин живота људи у 18. веку. Чак ни краљеви нису оно што су некада били, а све то преокреће егзактна мисао.

Титрање честица и количина нереда
`http://izvor.ba/`
27. марта 2020.

1.9 Хамилтонијан

Информација се испољава физичким дејством, производом енергије и трајања, а енергија има два главна облика, кинетичку и потенцијалну.

Збир те две је енергија тела у кретању, функција коју називамо *хамилтонијан* по ирском математичару Хамилтону (1833) који је почео изградњу физике на закону одржања енергије.

Сателит који у гравитацији слободно пада бржи је у јачем пољу због промена потенцијалне енергије која се допуњава енергијом кретања. Збир те две енергије константан је, све док на сателит не делује нека друга сила попут ракетног мотора, одбацивања терета, судара или трења са ваздухом. Слично се догађа наелектрисаним честицама у електромагнетном пољу, али и са осталим силама.

Стања и процеси квантне механике репрезентације су нормираних (јединичних) вектора и оператора апстрактних *Хилбертових*[18] простора међу којима је хамилтонијан

[17] Дмитриј Иванович Мендељејев (1834-1907), руски хемичар.
[18] David Hilbert (1862-1943), немачки математичар.

један од најважнијих. Он је збир оператора кинетичке и потенцијалне енергије а они су функције оператора импулса и положаја. Деловања ових током времена „реалност“ су за даља тестирања.

Из класичне механике знамо да ће се свака промена укупне енергије при промени импулса одразити неком променом положаја током времена. То каже прва од две чувене једначине хамилтонијана. Друга каже да свака акција која мења (укупну) енергију тела мењањем његовог положаја резултира реакцијом која мења импулс временом. Те две једначине дефинишу хамилтонијан и обрнуто, закон одржања енергије даје те једначине.

Разрада поменутих једначина води нас у невероватан свет теоријске физике. На првом кораку је *Шредингерова једначина* која је, једноставно речено, једнакост промене таласне функције временом и деловања хамилтонијана. Да је сва материја у таласима верујемо јер су познате материјалне појаве квантне физике решења те једначине, а оне које нису решења не успевамо доказати експериментима.

Комутатор два оператора А и Б је разлика њихових узастопних деловања АБ – БА. Она је нула када су процеси А и Б независни, што према реченим једначинама хамилтонијана не важи за импулс и положај, нити за енергију и време. Тада ови комутатори нису нуле него су реда величине кванта дејства, а њихове једначине постају *Хајзенбергове релације неодређености.* Физика је математички веома увезана, чак и када говори о неодређености због одређености. Зато је *квантна спрегнутост* тако збуњујућа а *Белова*[19] теорема (1964) несхватљива многима.

Ова теорема доказује контрадикцију идеје о скривеним параметрима којима би се наводно могло избећи „фантомско деловање на даљину“ (Ајнштајн) у квантној механици. Проблем са њом је контрадикција саме насумичности као и саме доследности, где се каже да без неизвесности нема извесности, без каузалности нема случајности! А то је тешко за сварити.

Чуда хамилтонијана су прича без краја.

Ако је у поменутом комутатору А произвољна функција, а Б је хамилтонијан, онда је комутатор једнак промени функције А временом. Дакле, нема промене функције ако су она и хамилтонијан независне појаве. Другим речима, свака промена тиче се енергије и времена. Производ енергије и времена је дејство, а оно је еквивалент физичке информације, па је информација сама суштина природе ствари.

Из претходног се (алгебарски) лако доказује да комутатор два импулса, или два положаја (различитих честица, места, тренутака) ишчезава. Дочим, комутатор импулса и положаја (исте честице) различит је од нуле. Те релације комутатора називају се канонским и о њима у најопштијем облику говори Стоун-Нојманова теорема[20] (1931). Интерпретирамо је тако да узајамно зависне појаве (формално) сводимо на „положај“ и „импулс“.

Остаје питање разумевање појма „положај“ помоћу „честице“, јер простор, време и материја само су информације (хипотеза које се држим), а сваки облик информације је коначно дељив, корпускуларан. Решење тог проблема одавно постоји у физици (Фоков простор, 1932) и стоји несхваћено до „теорије информације“. А то је, надам се, нека следећа тема.

Чуда хамилтонијана су прича без краја
`http://izvor.ba/`

[19] John Stewart Bell (1928-1990), ирски физичар.
[20] `https://en.wikipedia.org/wiki/Stone%E2%80%93von_Neumann_theorem`

3. априла 2020.

1.10 Белова неједнакост

Када бисмо неку појаву погрешно разумели у експериментима би нам се могло чинити да нас природа вара, а преварант би се раскринкао учинивши тачан алгебарски израз нетачним.

То је поента методе контрадикције у раду Џона Бела од 1964. године којом је он оспорио идеју „скривених параметара“ након открића квантне спрегнутости. Ти хипотетички параметри и „непотпуност квантне механике“ били су покушај објашњења Ајнштајн-Подолски-Розеновог *парадокса* (1935) ради избегавања „фантомског деловања на даљину“.

Белова теорема и његова даља истраживања доказали су такве покушаје „спасавања“ квантне механике логички немогућим. Она је можда још значајнија за теорију информације, јер подржава њену основну поставку – да случајност постоји.

Трудио сам се и нисам је могао схватити – уобичајене су изјаве студената теоријске физике. Белова теорема једноставно је претешка за разумети, али ако ју је уопште могуће објашњавати лаицима, онда помаже и пример америчког професора Давида Харисона из 1982. године.

Имамо три различита својства А, Б и Ц. Број објеката са својством А али не и са својством Б плус број објеката са својством Б али не и својством Ц већи је или једнак броју објеката који имају својство А али не и Ц. То је алгебарски тачан исказ, проверите! Збир бројева, број(А, не Б) + број(Б, не Ц) већи је или једнак броју(А, не Ц).

Ову релацију називамо *Белова неједнакост*. Тестирајмо је у некој (замишљеној) просторији са различитим особама. Нека својство А значи „мушкарац“, својство Б „висине 175 или више“ у центиметрима, својство Ц „има плаве очи“. Тада поменута неједнакост каже да је број мушкараца нижих од 175 плус број особа (мушких или женских) виших од 175 али који немају плаве очи једнак је или већи од броја мушкараца који немају плаве очи.

Колика год да је просторија, са колико хоћемо и каквих било особа, горња алгебарска неједнакост увек је тачна, она је неспорна. Управо зато, ако бројећи особе у просторији нађемо да је она нетачна, закључићемо да је било варања, рецимо неки су улазили или излазили из просторије док смо их бројали.

Поменута релација није узета непромишљено, она је типична завршница израчунавања квантног спрезања и слична је другим Беловим неједнакостима. Свака од њих руши идеју претпостављених скривених параметара АПР парадокса – уведену ради избегавања „фантомског деловања на даљину“. Мерење које би оспорило Белову неједнакост казало би нам да нас природа вара или да се ми варамо у разумевању природе.

На пример, наведена неједнакост се примењује на зраку испаљених честица (фотона, електрона). Спин је мерљив вектор (поларизацијом или магнетима). Нека је А оријентације спина „горе“ (север), Б оријентације „горе-десно“ (север-исток), Ц оријентација „десно“ (исток). Тада Белова неједнакост каже: број електрона са спином „горе“ али не „горе-десно“ плус број са спином „горе-десно“ али не „десно“ већи је или једнак броју електрона спина „горе“ али не „десно“.

Међутим, мерењем спина „горе“ а затим „горе-десно“ настаје парадокс. Од свих електрона који прођу први филтер, 85 одсто њих прође други, а не 50 одсто – што би

могли очекивати од просте расподеле (оријентација смера случајних вектора, спина, на класичан начин).

Експеримент показује да је само 15 одсто електрона спина „горе“ са спином „горе-десно“, што квари рачун у Беловој неједнакости. У примеру са бројањем особа у просторији аналогија је да одређивањем пола мењамо висину особе.

Заправо, када се не би десио овај поремећај (очекиване) вероватноће то би значило да смо победили Хајзенбергове *релације неодређености.* Било би да је неодређеност у квантном свету привидна, да она долази из нашег непознавања свих узрока и да има параметара које само треба урачунати и ето свеопште каузалне стварности. Супротно томе у природи су неке случајности објективне и не могу се надоместити триковима.

Са становишта теорије *информације перцепције*, додајем, када од спрегнутог квантног система добијемо неку информацију одузимамо му део неодређености и утолико га одредимо. Он се синхронизује, јер важе и други закони (информације) који говоре о извесности, неслучајности, а начин тог „чудног“ усклађивања потврда је информатичке природе физичког света.

Чињеница да се синхронизације (простора, времена и материје) могу дешавати тренутно и без обзира на удаљеност делова спрегнутог система, па евентуално и деловањем садашњости на прошлост, тачније речено зато што нас то збуњује, говори нам да природа није баш оно што мислимо да је. Са друге стране, зависне случајне догађаје можемо посматрати као занимљива „дејства“ настала дефицитом дејства.

Неподношљива лакоћа Белове теореме
`http://izvor.ba/`
10. априла 2020.

1.11 Паулијев принцип

Аустријско-швајцарско-амерички физичар Волфганг *Паули*[21] формулисао је 1925. принцип искључења квантне механике због којег је на предлог Ајнштајна 1945. године добио Нобелову награду за физику.

Тај принцип као алатка хемије за изградњу *Периодног система* елемената добро је познат у свом тривијалном облику: у истом атому не могу бити два идентична електрона. Прави је изазов објаснити га тачније, популарно а да то не буде банално.

Квантна механика је репрезентација *Хилбертове алгебре.* Мерљиве величине (обзервабле) су координатне осе, честице (квантна стања) су вектори (расподеле вероватноћа), а пројекције вектора на координатне осе дају шансе мерења. У апстрактној алгебри тачка је вектор као и „скуп честица“. Таласне функције такође су вектори, а векторски простор чине решења таласне једначине. Због таквих налаза математике „врти се у глави“ и њена поента зачас побегне.

Знамо да у стварности два различита тела не могу бити на истом месту у исто време. Аналогно томе када бацимо два новчића, сваки са пола-пола шанси за писмо или главу, добијамо четири равноправна исхода: пп, пг, гп, гг. То значи да увек постоје „први“‘ и „други“ новчић, јер би иначе пг и гп били исти исход, па би пп, као и гг, били око трећине исхода у више бацања.

Апстрахујући овај концепт посматрамо две „честице“ и два „стања“. Тако АБ значи „прва честица је у стању А, а друга у стању Б“, а БА значи „прва честица је у стању

[21] Wolfgang Pauli (1900-1958), аустријски теоријски физичар.

Б, а друга у А“. Затим долази тежи део. Када кажемо „две јабуке плус три јабуке су пет јабука“, а да при томе не разматрамо појам „јабуке“, тек онда смо на терену математике.

Покушајте сада ово апстраховати или се бар мало померити ка домену „неких“ величина не мареће каквих. Стања (честице) нека су „вектори“. Њихови производи су „тензори“, композиције вектора и не размишљајте превише о томе шта би те „величине“ могле бити. Тела која не могу заузимати исти простор не трпе се међусобно, а њихова негација су трпељиви ентитети.

Збир АБ+БА била би једна трпељива ситуација, јер истовремено имамо прву честицу у стању А (другу у Б) са првом честицом у Б (другом у А). Таква је на пример енергија. Она се може додавати једна на другу, кинетичка на потенцијалну, без проблема. Такав је и простор, такве су и могућности пре исхода случајног догађаја. Тај збир је симетричне форме, јер заменом честица у стањима она остаје иста.

Шта би онда била негација ове негације? То је, рекли смо, нетрпељива ситуација, али долазећи сада из њене негације видимо да исту морамо тако формирати да она не може имати физички смисао када би прва честица била исто што и друга. Да скратим, негација трпељивости може бити само разлика АБ-БА и ништа друго, а ево због чега.

Физички реални могу бити само такви вектори који се могу нормирати (имају јединични интензитет), што се увек може постићи делећи вектор његовим интензитетом – осим са нула вектором. Само нормиран вектор може представљати расподелу вероватноћа, односно суперпозицију квантних стања, а само онај који се не може нормирати може изражавати оно што нам сада треба. Такав је АБ-БА, јер би сматрајући дате две истом честицом добили нулу.

Према томе, како негацијом нетолеранције добијамо толеранцију, тако супротност ситуације АБ+БА постаје АБ-БА. Прва стања (збир) су симетрична, за друга (разлика) кажемо да су антисиметрична, прва називамо *бозонима*, друга *фермионима*. Прва имају назив према Бозе-Ајнштајновој статистици, према првом од наведених аутора који је несрећно страдао у време открића, а друга према Ферми-Дираковој статистици. Бозонске расподеле вероватноћа не разликују појединост честица, а фермионске честице се разликују, без обзира да ли је те разлике лако примећивати.

Главно сте, надам се, разумели. Превише би било да даље објашњавам зашто бозони имају целобројан *спин* (унутрашњи магнетни момент), а фермиони увек половичан, јер већ из овога може се осетити део суптилности и генијалности Паулија и одушевљење Ајнштајна када га је предложио за Нобелову награду.

Суштина Паулијевог открића била је у антисиметричним таласним функцијама парова тачака (честица, квантних стања) и њихових пројекција на координатне осе када меримо смер. Антисиметрична функција заменом места аргумената (фермиона) мења предзнак, па када су два аргумента један те исти фермион, негативна и позитивна вредност функције биле би једнаке, што значи да је поменута функција нулта, нема је. То је Паулијев изворни принцип, да два фермиона исте врсте имају заједничку таласну функцију која је антисиметрична.

Другим речима, два фермиона исте врсте не могу бити у истом квантном стању симултано. Ово се пре свега односи на четири квантна броја *електрона* у *атому*: главни квантни број (n), азимутни квантни број (ℓ), магнетни квантни број (m) и спин (s). У истом атому, два електрона, два протона, или неутрона не могу имати сва четири квантна броја једнака, али протон и неутрон могу.

Ову идеју су даље развијали руски физичар Владимир *Фок*[22] и немачки математичар *Јордан*[23] у правцу који ће у (мојој) теорији информације постати нарочито интересантан. Са *Дираком*[24] (1927) они су поставили основе тзв. друге квантизације, формализма за опис квантних система много тела, са вишеструким тензорским производом вектора, симетричних или антисиметричних, аналогно Паулијевом. Али то је једна друга прича.

Главобоља Паулијевог принципа
`http://izvor.ba/`
17. априла 2020.

1.12 Глобализација

Једна од важних ставки коју је теорија информације до сада апсолвирала је *принцип најмањег дејства*.

Није погрешно употребити овај израз за информацију једнак оном чувеном у теоријској физици из којег изводимо данас све познате једначине кретања – од класичне физике, термодинамике, теорије релативности, до квантне механике. Физичка супстанца поседује ту лењост физичког дејства, а информација је еквивалент дејству.

Супстанца тежи неделовању и мањем изненађењу, па су основни закони физике једноставнији и односе се на једноставније структуре. Њихова информација (дејство) неће се тек тако одметнути, него се мора размењивати или ће се цела честица предати. Са друге стране, настојећи се решити вишка, материја се усложњава због једног механизма који ми је тек од недавно познат.

Квантно стање је пре свега једна или више честица. Формално га водимо као вектор чије компоненте дају вероватноће исхода или – физикалније речено – оно је *суперпозиција* могућности. Вероватније могућности чешће се реализују, али су мање информативне.

Спрега квантних стања је збир производа одговарајућих компоненти два вектора, *фиделити*, па и она узима вредности вероватноће (Шварцова неједнакост) и има њено својство да се спреге веће вредности чешће реализују. Зато што теже мањем дејству, мањој информацији, што значи већој вероватноћи – квантна стања се удружују!

Настају парадоксалне ситуације. Идући ка мањој акцији физичка твар се спонтано утапа у веће структуре. Она тако налази смирај и нову вредност. Попут растављене машине која неће радити, сложене молекуле имају својства на први поглед одсутна у атомима од којих се састоје и могу имати нови квалитет који би био потпуно необјашњив без теорије информације.

Сличне *синергије* (интеракције или сарадње две или више организација, супстанци или других агенаса за стварање комбинованог ефекта већег од збира њихових одвојених ефеката) постоје у све вишим нивоима удруживања све до живих бића, па и даље. Простији облици живота еволуирају у ћелије ткива сложенијих форми, ниже у више хијерархије. Стални импулс спрезању поменуто је начело минимализма, тежња физичке структуре да се реши својих вишкова информације (дејства) у условима када је сва околна супстанца попуњена. Тако еволуирају и цивилизације.

[22] Владимир Александрович Фок (1898-1974), совјетски физичар.
[23] Pascual Jordan (1902-1980), немачки теоријски физичар.
[24] Paul Dirac (1902-1984), енглески теоријски физичар.

Гоњени нагонима произведеним вишковима информације јединке поред осталог теже сигурности и ефикасности. Одричући се личних слобода предајемо их фараонима, царевима, краљевима, лидерима, политичким партијама, све „бољим“ организацијама, несвесни најдубљег узрока општег потчињавања.

Вишак информације значи поседовање већег дејства, веће неизвесности и веће способности бирања. На већем нивоу сложености те структуре престају бити предмет изучавања физике, оне се више не крећу једноставним трајекторијама најмањег дејства, као што би се *светлост* одбијала од огледала прелазећи најкраћи пут између две тачке, или као што би се она преламала кроз средине различитих оптичких густина (брзина) стижући за најкраће време, него постају „непослушне“. Тада настају нагони, обичаји и законодавство.

Оно што сматрамо увођењем правила и реда заправо је жеља да се решимо вишкова дејства. То је корисно приметити за интензивније разумевање функције и еволуције друштва, да потреба за друштвеном стегом долази од вишкова информације појединаца и жеље да се ти вишкови смање. Појединац се тада ослобађа непријатне неизвесности, потребе за смарајућим доношењем критичних одлука, ризика, али тако да наводно живот траје. Предност тада дајемо способнијем краљу него себичном фараону, уређеном Риму наспрам варварског преживљавања, спокоју који нуде цркве и феуди средњег века.

Једнакост генерише сукобе, па је она привлачна и као добра позиција за израз сопствених вишкова виталности, али и за лакше стварање нових хијерархија. Идеја равноправности кроз правну државу била је пун погодак у време Француске револуције са којим се њена монархија није могла носити.

Али визија (правног) система аутомата који сваког појединца надмашује у способности да нам свима донесе сигурност и ефикасност има колико дубоку толико на почетку невидљиву мањкавост. Она гуши „агресивност“ фаворизујући је. Подстичући равноправност *правни системи* стварају све веће потребе за правним регулацијама и не отварајући врата новим хијерархијама они копају себи гроб, а копају га и отварајући.

Комунизам је тако дошао до тачке када је постао само стега и није могао даље, а капитализам је изнедрио корпорације. Довео нас је у стање сазревања нове опсесије редом и радом, фирми и корпорација, које се за сада стидљиво препознаје као *глобализам*. Нови мото постаје „Политичари нису решење него узрок проблема!“, а када ти трендови оснаже и идеје допру, ствари ће се обрнути у супротност данашњим и народ ће хтети глобализам.

Историја сукоба идеје правне државе и недостојних монарха прети да се реплицира у сукоб идеје савршенства хијерархија фирми против мање ефикасних и застарелих метода политике. Почетно попуштање принципима права у монархијама личи на корумпираност и манипулације политичке елите данас. Међутим, глобализам ће такође морати нудити сигурност, што значи мир, благостање и равноправност, много тога што не може остварити због опет једне мањкавости, сада другачије врсте од претходне правне.

Корпорације су у суштини хијерархије чија сврха је међусобно сукобљавање. Оне не могу гајити искрену милост према својим поданицима, јер ће иначе саме пропадати. Хранићe се потребама за новцем и њихово уређено друштво биће принуђено да еволуира ка идеаланом робовласничком систему. Тако ће нарастати вечите супротности између жеља и стварности, оне исте мрске које су заправо главна одлика живота.

Политичари нису решење него узрок проблема

http://izvor.ba/
24. априла 2020.

1.13 Разноврсност

Суштина информације је непредвидљивост. Поновљена *вест* није више првобитна вест и у том смислу сам појам многострукости добија нова значења. До тада запостављан, концепт *разноврсности* у (мојој) теорији информације је фундаметалан, а са законом одржања посебно је занимљив.

Наизглед контрадикторни захтеви, да се овај свет састоји од вести и само од вести, да оне чим се појаве више нису оно што су биле, да је њихова количина (информација произвољног затвореног система) константна представљају интересантна открића. Пре свега, отуда прошлост која се се стално гомила и расте на начин да никада није иста. Као све остало на овом свету и прошлост је врста информације, па је она онда и врста дејства.

Није могуће угасити вест тако да иза ње ништа не остаје. Као елементарна честица вест се састоји од опција у смењивању на начин којим чува количину дате неизвесности. Слично обиласку једне зграде, неког објекта, једног „нечега“ када видимо све мање једне фасаде да би утолико више видели друге, квант дејства је интегритет, најмањи пакет информације и елементарна честица којој тачнијим опажањем положаја импулс постаје нетачнији.

Информација нас на тај начин суптилно повезује са бесконачностима које су „нормална ствар“ у математици. У овој теорији информације бесконачности су градиво физичког дејства и њена филозофија у том смислу личи на Платонов свет идеја (али постоје и разлике).

На страну са филозофијом, у физици имамо исто, на пример код кретања воденог таласа. Шта се ту све креће? Честице воде иду горе-доле и једва да се померају лево и десно, а талас иде окомито, напред. Шта је ту супстанцијално, молекуларно у кретању таласа? Ако је све у васиони грађено од (делова) хемијске твари, онда је водени талас парадоксална појава. Е ту је једна од граница светова које повезује оваква теорија информације.

Тешко је такву теорију разумети, па и немогуће ако држимо да реалност чини само конкретна твар и ништа више. Ништа није бољи ни екстремни став да математику стварамо. Њу откривамо ако су њене истине псеудо-информације (делују једносмерно), а иначе смо у овом свету и узроци и последице.

Из претпоставке да је информација свеприсутна следи и идеја да треба проверити и могућности памћења простора. Оно би разрешило познати парадокс растуће ентропије супстанце са једне стране и рецимо реверзибилних оператора (еволуција) квантне механике.

Разбијањем чаше и расипањем парчића срче повећава се ентропија (неред) чаше неповратно, а део (активне) информације супстанце постаје (пасивна) информација простора, њена прошлост из које се информација (у начелу) теже активира. Оператори квантне механике, пак, сви су унитарни. Они су такви јер нормиране (јединичне) векторе расподела вероватноћа (супституција) пресликавају у нормиране, а унитарни процеси су повратни, чувају информацију.

Простор тако памти да ентропија супстанце спонтано расте, што значи да њена енергија и информација опадају, али да укупна енергија и информација васионе остаје

константна. Тај веома спор и упоран ток топљења супстанце и повећања простора утиче на *ширење свемира*. Као што сам о томе већ писао на основу принципа информације, углавном је једносмеран, јер природа шкртари са емисијама информације, овде из неизвесности простора у извесност супстанце.

Додатно, та прошлост може (не мора) деловати и као *тамна материја* космоса.

Због закона одржања сваки је аспект информације коначно дељив (јер само бесконачности се пресликавају у своје праве делове). Прецизније гледано ово се односи пре на исходе него на могућности, пре на актуелну него на потенцијалну информацију. Могућности су форме бозона (може их бити више, толеришу се), а исходи фермиона (један по један, не толеришу се), па су фермиони ти на које, се пре других, односи највише пребројива *бесконачнст*.

Када скоро сваком дискретном исходу случајног догађаја (фермиону, месту вакуума, тренутку постојања) придружимо више опција из којих је нешто могло настати, добијамо непребројиво бесконачан скуп могућности. Толики је скуп стања, а онда и светова који су се (или би се) могли десити, али нису (или не би), јер исходи су јединствени (нетолерантни).

Математику бесконачности која је настала са *Канторовом*[25] теоријом скупова није лако препричати. Позитивних и свих целих бројева има „једнако много“, јер постоји бијекција између њих. Нижући их од нуле и алтернатвно по један позитиван и негативан целе бројеве редамо у низ, овај можемо бројати, па је он „пребројив скуп“ какав је и скуп позитивних целих бројева.

Пребројив скуп чини и низ децимала броја пи ($\pi = 3,141592\ldots$), али не и скуп вредности које би такве децимале давале. Све њихове вредности, континуум реалних бројева, добијамо када у бесконачном низу позиција цифара варирамо бесконачно њих декадним цифрама.

Непребројивост континуума доказује се свођењем на контрадикцију претпоставке да постоји бесконачан низ свих реалних бројева из интервала од нуле до један. Наиме, из претпостављеног низа бројева (децималног записа) уочимо први и прву цифру иза запете (a). Њој придружимо неку од ње различиту цифру (x). У другом броју уочимо другу цифру (b) и замислимо од ње различиту цифру (y). Поводом треће цифре трећег броја запамтимо цифру која јој није једнака (z) итд.

Нижемо нове цифре у нови децимални број ($0,xyz\ldots$) који јесте реалан, из интервала је од нуле до један, али није једнак нити једном од бројева датог низа! Он се од првог разликује по првој децимали, од другог по другој и уопште ни са једним наводног низа „свих“ реалних бројева тај нови број није једнак – бар по некој децимали. То је контрадикција са претпоставком да је реалне бројеви из интервала од нуле до један могуће поредати у један низ. Зато континуум не може бити једнак пребројиво бесконачном скупу.

Од бесконачног дакле има и бесконачније, а у суштини ове приче је да су и такве апстракције неке информације. Не комуницира свашта са свачим, па ни то можда није њен крај.

Није могуће угасити вест
`http://izvor.ba/`
1. маја 2020.

[25] Georg Cantor (1845-1918), немачки математичар.

1.14 Расподеле

Радим са статистикама у друштвеним појавама и користим расподеле вероватноћа – пита ме колега за савет – али у новим ситуацијама тешко препознајем ону праву.

Мој најбољи предлог био би му – шире гледајући свеједно је, све расподеле су исте, у свакој од ситуација могуће је применити скоро сваку од статистика. Али, тај предлог није лако разумљив. Без математизирања рашчланити нијансе наизглед веома различитих расподела, у насумичности под микроскопом видети сличне шире образце и њихове посебности – да ли је то могуће?

Основна у *теорији вероватноће* је Бернулијева, тзв. *биномна расподела.* Коцка се баца више пута (нпр. 100) и броје се реализације истог „жељеног“ догађаја. Када је тај један од шест бројева, рецимо „пет“, очекивана вредност је шестина свих покушаја (100/6). Она је средња вредност и највероватнији број „петица“ у скупу свих (100) покушаја. Шансе осталих опадају са удаљавањем од те „очекиване“ вредности. Средње одступање од средње вредности назива се дисперзија (варијанса). У биномној расподели она је производ броја покушаја и две вероватноће, повољног и неповољног исхода. Модел биномне расподеле има много примена.

На пример, у болници је забележено да од свих пацијената (неке болести) 75 одсто умру од ње. Колика је вероватноћа да ће се од пет насумице изабраних пацијената три опоравити? Због само два исхода то је биномна расподела – пацијент преживљава или не са вероватноћама редом 0,25 и 0,75. У низу од пет таквих три су повољна и два неповољна исхода, куб и квадрат датих вероватноћа, а њихових комбинација је десет. Производ вероватноћа и комбинација за мало је 0,1. Шанса да се три пацијента од пет насумичних опораве је 1:10.

Када у датом примеру препознате биномну расподелу, то постаје лакше у следећем. Бројимо аутомобиле на некој цести и посебно оне који се крећу „жељеном“ брзином. Број повољних подељен бројем свих, у неком временском периоду, вероватноћа је повољних. Њој додата вероватноћа неповољних исхода је један, па имамо биномну расподелу. У истој шеми је и расподела осцилација молекула гаса. Број молекула је огроман и биномну расподелу апроксимирамо тзв. *нормалном*, експоненцијалном функцијом квадрата брзина. Њен граф има познати облик Гаусовог звона са теменом изнад средње вредности.

Ако квадрате брзина експоненцијалне функције заменимо кинетичком енергијом (са додатним константама), оне постају експоненцијалне функције расподеле вероватноћа енергија молекула. У експоненту више нису (Гаусови) квадрати променљивих, него први степени, а расподела је позната Максвел-Болцманова. Експоненти су и вероватноће, а њихови логаритми тада су информације. Визуело сасвим различите графове веже унутрашња логика!

Напомињем, у (мојој) информатичкој интерпретацији МБ расподеле енергије биле би сабирци *информације перцепције.* Они су поједине „слободе“ која је свака производ „способности“ субјекта и одговарајућег објективног „ограничења“ на датом (случајном) догађају. Како је информација перцепције блиска физичком дејству, производу промене енергије и протеклог времена, излазимо формално исто, на МБ расподелу.

Већ из примера аутомобила и молекула видимо да МБ расподела тражи луфт између својих ентитета. То са своје стране указује на њену „тајну везу“ са Барабашијевим расподелама слободних мрежа, на произвољност удаљености интерпретирану том слободом.

Дубље у микросвету нема те комоције, не могу се занемарити узајамна деловања

честица и настаје потреба за новом формулом. Тада постаје важна подела елементарних честица на фермионе и бозоне, прве са Ферми-Дираковом расподелом, а друге са Бозе-Ајнштајновом. Чим се макар мало одмакнемо од квантног света те две расподеле се не разликују, толико су суптилне. Обе се једнако добро апроксимирају термодинамичком (МБ) расподелом.

Реципрочна вредност вероватноће је нека средња вредност „броја присутних“ (равноправних) из којих насумице извлачимо један. Када том броју расподеле гасова (МБ) додамо један добијамо расподелу фермиона (ФД), а ако одузмемо један добијамо расподелу бозона (БА).

Ове незнатне, квантне разлике, лакше памтимо сетимо ли се да фермиони не трпе у својој околини себи сличне па се рецимо представљају као да их је више. Бозони су толерантнији и обрнуто праве се да им није тесно. Фермионска расподела добро функционише и у друштвеним појавама у ситуацијама када има више кандидата а може бити изабран само један. Бозонска, поред осталог, боље ради и у случају поменутих слободних мрежа. Како то разумети?

Закон одржања енергије или информације приближно преносимо у закон одржања количине новца у робно-новчаним трансакцијама. Када јединки није превише, аналогија са физиком затим иде даље и у њене расподеле. На пример, ако на постојеће чворове неке мреже слободно додајемо нове са новим повезницама, веће су шансе додавања чворовима са више повезница. Из рачуна излази степени закон слободних мрежа, са веома малим бројем чворова са веома великим бројем повезница наспрам веома великог броја чворова са малим бројем повезница.

Такве су мреже токова новца (са веома мало веома богатих), интернет мреже (са ретким концентраторима), па и електроводови већих богатијих земаља, или друштвена познанства и популарност – не само људи него и филмова, песама, политика. Такво је и ширење зараза по кластерима, а недавно се појавила и идеја да исти модел важи и за ширење „случајних“ убистава по америчким центрима и гетоима.

Зато што степени закон важи за слободно умрежавање он је апроксимација расподеле бозона. Наиме, експоненцијална функција развијена у ред и када јој се одузме јединица постаје приближно степена функција. Код фермионске расподеле ту јединицу додали би и „магије“ преласка на степени закон нестало би.

Требало би да сада препознајете сићушност принципијелне разлике водећих расподела, али ако тражите већу тачност ова још увек популарна прича постаје нешто друго. Да није тако математичка открића била би прелака ствар и ми бисмо били одавно господари васионе.

Расподела ширења заразе по кластерима
`http://izvor.ba/`
9. маја 2020.

1.15 Непокретна тачка

Како нећу чути за „Банахов став о непокретној тачки“, па то свако зна, то су прве речи које деца изговарају када проговоре – зезајући се рекао ми један колега у разговору о бесконачности у физици и настављајући – једва да се сећам тога са студија, подсети ме. Знам да у математици „од бесконачног има и бесконачније“ – цитирајући ме питао је даље – али из твојих објашњења није ми сасвим јасан пренос наводне бесконачности у физику?

Слажем се да је *бесконачност* тврд орах за физику и зато сам суздржан у овим текстовима, кажем. Бесконачности су у математици неизбежне већ због снаге принципа контрадикције, а онда су и део (моје) *теорије информације* због самог постојања идеје о њима. Па ипак не журим, не због мене него због других.

Потврђује је на пример фантастичан склад математичке анализе. Иако је била камен спотицања Канторове теорије скупова и разлог да га савременици сматрају неозбиљним, идеја о „бесконачнијем од бесконачног“ надвладала је снагом своје логике. *Геделова*[26] теорема немогућности (да нема краја истинама) прекретница је иза које егзистенцију бесконачности у математици можемо узети као готову ствар.

Том развоју, верујем, придружиће се и (моја) теорија информације, а ево због чега. *Псеудо-информација* (псеудо-реалност) је она која делује на нас а ми на њу не. Такве су на пример математичке теореме. Како онда објаснити цурење дејства (информације) из тог псеудо-света ка нама, из нечега што се не мења и не допуњава? Размишљам наглас и саговорник се укључује питањем. За њих не важи закон одржања?

Да, браво, то је једна од изгледних опција. Формално она се не чини једином, али за сада је можемо сматрати довољном. Нема контрадикције, јер је из бесконачног скупа могуће издвојити и пребројиво бесконачно много његових елемената а да их опет остане једнако бесконачно много.

Она отвара могућности које су наизглед у складу са многим па и са Геделовом теоремом немогућности. Али разумљиво је, ваљда, да се са тиме још увек не могу разметати, иначе многи би рекли „да знао сам да овај није нормалан“ и наставак теорије ишао би још анонимније. Али вратимо се теми.

За сада, прећутно како, рецимо да имамо континуум тачака, неку дефиницију удаљености и пресликавање простора на самог себе. Када је оно тзв. *контракција*, што значи да су копије узајамно ближе од оригинала, онда постоји јединствена „непокретна тачка“, лик који се пресликавањем не премешта. Ту је теорему 1922. године први прецизно исказао и доказао пољски математичар Стефан *Банах*[27] и од тада је увиђамо свукуда.

То је примена бесконачности. Једноставан пример Банаховог става је мапа стављена на тло околине коју представља. Тада постоји јединствена тачка на мапи која се тачно поклапа са местом на тлу.

Други пример добијамо полазећи од произвољног троугла ABC. Средине његових страница, тачке A’ на BC, B’ на CA и C’ на AB формирају нови троугао A’B’C’, а средине тих страница нови и тако даље. У n-том кораку средине страница формирају n-ти троугао. Може се показати да низ ових троуглова конвергира једној тачки која је тежиште сваког троугла у низу.

Сличан пример је „слика у слици“ (mise en abyme), постављених копија слике унутар саме слике. Добија се наизглед бесконачан низ *рекурзија* (поступака или функција које се дефинишу помоћу саме себе) које, према Банаховом ставу, садрже једну непокретну тачку.

Мало више „математички пример“ био би доказ јединствености решења „довољно регуларне“ диференцијалне једначине. У простору функција снабдевеним метриком (дефинисаним удаљеностима), који је *комплетан* (постоје граничне вредности низова), са пресликавањем функција у функције које тада називамо *оператором*, решење диференцијалне једначине, уколико оно постоји, је фиксна тачка тог оператора.

[26] Kurt Gödel (1906-1973), аустријско-амерички математичар.
[27] Stefan Banach (1892-1945), пољски математичар.

Шредингерова једначина је „довољно регуларна“, као уосталом и скоро све остале замисливе таласне диференцијалне једначине, што значи да се сваком потенцијалу може придружити неки талас, али и обрнуто да се сваком таласу може придружити неки потенцијал. Прво је добро познато у квантној механици, а ово друго и није: сваком таласу се може придружити нека информација, њој дејство, па онда и енергија. Модел енергије-фреквенције физике тада се може применити на периодичне појаве уопште.

Процес *слободног пада* у гравитационом пољу пример је пресликавања контракцијом, нама посебно занимљив због принципа минимализма информације. Физички систем спонтано тежи стању мање информације; у том је смислу орбита сателита његов приватни минимум и „његова непокретна тачка”. Уобичајеним језиком физике речено трајекторију чине стања најмањих *потенцијала* датог сателита, његове потенцијалне енергије која множена константним јединицама сопственог времена даје сопствена дејства, дакле опет информацију.

Слично је и са свим другим *пољима сила*, јер путање набоја у њима израчунавамо такође из одговарајућих потенцијала не нарушавајући правило да је мањак (релативне) потенцијалне енергије привлачан, а вишак одбојан. То све не би имало смисла када би употреба бесконачности у физици била забрањена.

Мировање непокретне тачке
`http://izvor.ba/`
15. маја 2020.

1.16 Демократија

Лаж наивне заводи, а опрезне поучава. У тој изреци много је туге и радости савремених *демократија* и уопште друштава сличних по жељама за постизањем неке равноправности међу људима – било да су оне очигледно посебне или су у суптилним нијансама.

Као што једнаке стартне позиције такмичара обећавају боља такмичења, тако то постижу и једнаке шансе на тржишту путем веће конкуренције или разни све интересантнији сукоби који настају из савремених начела једнакости лица пред законом. За *једнакост* се заузимамо да бисмо повећали могућности, због прогреса и да би они који се осећају потцењени кренули за нама.

Али, „чашу меда јошт нико не попи, што је чашом жучи не загрчи“, писао је *Његош*[28]. Ако је нешто добро, оно није и универзално добро. Боље лечење данас вероватно узрокује нездравију популацију сутра, државна помоћ лошијој привреди кочи појаву неке боље, запошљавање политички подобних колико доприноси успону власти помоћу оданости толико утире пут њеном посртању због нестручности. Обећавајућа такмичења за масе изнедре шампионе против којих обичан свет више нема шансе.

Стискањем балона његов садржај се негде прелива, напетост тражи свој расплет, а настојање за *равноправношћу* друштва исцури у неку неравноправност. То јесу само аналогије, наравно, али надам се корисне, ако не за разумевање доказа немогућности демократије који ћу покушати скицирати, онда барем за памћење резултата.

На путу ка *комунизму* појам једнакости подразумевао је радничку класу и свако то друштво изродило је доживотног председника. Приметимо исти шаблон и у *диктату-*

[28] Петар II Петровић Његош (1813-1851), српски владика, песник и филозоф.

рама уопште у њиховом апеловању на неке једнакости без којих владање масама заправо није могуће. Ситничарећи у поправљању „неправди“ које производи „добар“ савремени правни систем, у трци да регулише сукобе које он сам генерише инсистирајући на једнакостима, настаје оно што од недавно препознајемо као *политичку коректност* у негативном значењу. Дајући предност *слободном тржишту* добија се владавина богатих појединаца, власника банака или корпорација.

Невероватно је, али управо је принцип једнакости кључни генератор поменутих неједнакости. Писао сам о том апсурдном аутоматизму са различитих позиција – од набрајања историјских догађаја до његових узрока у начелима информације, а делом и на следећи начин.

Математички модел *слободних мрежа* састоји се од чворова са једнако вероватним повезницама. Када нови чвор спајамо са старима нова повезница има једнаке шансе као и свака друга: она ће управо зато вероватније припасти чвору са више повезница. То је општа форма једнакости. Брзином расподеле *степеног закона* (енг. Power law) издваја се затим веома мали број чворова са веома великим бројем повезница наспрам веома великог броја чворова са веома мало повезница, дакле управо због инсистирања на равноправности повезивања!

Последице „слободног мрежног“ повезивања даље третирамо формално, попут таблице множења и често са познатим интелектуалним напором решавања задатака из праксе помоћу математике. Покушајмо прво разумети нека општа места.

Та позната мрежна законитост има и свој информатички део. Број повезница (означимо са x) неког чвора пропорционалан је вероватноћи повезивања (p), а како је логаритам вероватноће (једнако вероватних исхода) информација, то је вероватноћа пропорционална неком степену броја повезница који се обично означава са „минус алфа“ ($-\alpha$). Отуда „минус“ што вероватноћа p опада када број x расте, па је експонент α увек већи од један. У најчешћим ситуацијама алфа је реалан број између два и три.

Функција кумулативне дистрибуције је вероватноћа да је број повезница већи од неког датог (опет x) и израчунава се сабирањем (интегралењем) претходних вероватноћа. Резултат је *Паретов*[29] закон, врста степеног закона са алфом за један мањом ($\alpha-1$), између један и два, са графом сличнијим правој и једноставнијим за процену броја догађаја у задатом периоду.

Паретов закон распоређује познанства, цитате, продате књиге, примање телефонских позива, лајкова, ширења интернета, интеракције протеина, магнитуде земљотреса, пречника кратера. Он се користи у нагађању времена до следећег земљотреса, поплаве, пада астероида.

Када би становника на Земљи било бесконачно много, а вирус неке инфекције не би мутирао, нити би се остали услови његовог ширења мењали, онда би се пораст заражених временом стабилизовао око неке (праве) линије Паретовог закона. Стохастичка појава тада би постајала каузална. Али у пракси постоје оганичења која је могуће уврстити у рачун, а отуда оптимуми, екстремне вредности ширења слободне мреже.

Текућа достигнута вредност подељена оптималном израчунљив је коефицијент мреже који се популарно назива *правило 80-20*. Правило „80-20“ каже да ће око 80 одсто слободних мрежа чинити чворови са мало повезница, а осталих 20 одсто чворови са много повезница. Занимљивост тог израчунавања је отприлике овај исти однос, његова велика независност од врсте слободне мреже.

Друга једна занимљивост слободних мрежа каже да „мој пријатељ има више прија-

[29] Vilfredo Pareto (1848-1923), италијански инжењер, економиста и социолог.

тења него ја“. Има тога још, а има дражи и у томе да занимљивости сами проналазимо. Додаћу, слободне мреже су и ситуације када се може слободно лагати, ширити неистине растерећено од опасности да нас неко због тога ухвати и кажњава. На пример, ако је такво и пласирање *лажних вести* на интернету, онда правило „80-20“ каже да се четири пута брже интернетом шири лаж од истине. Отприлике тај однос могао би, претпостављам, бити и обим писане фикције наспрам научих радова, број лошијих и најбољих ученика у школи или онога што појединац није и што јесте разумео на неком предавању.

Коначно, у демократска права спадају и нека права на лагање. Треба бити наиван па не примећивати да људи не говоре истину и не знати читати истине о њима, о свету и себи из тих лажи, јер то тада више није због демократије, него је до читаоца.

Мој пријатељ има више пријатеља него ја
`http://izvor.ba/`
22. маја 2020.

1.17 Садашњост

Откуда долази *садашњост*? То је важно, а можда и централно питање „теорије информације“ на које би се одговор могао чинити тако необичан да га је боље прећутати. Ово је део те приче.

У свим физичким интеракцијама нешто са нечим комуницира, размењују се дејства и дефинише *реалност*. Када један субјекат *комуницира* са другим, њих два узајамно су реални, а ако други може комуницирати са трећим, са којим први непосредно не мора, онда кажемо да је и трећи узајамно реалан (на неки начин) са првим. Прича о „реалности“ тако се пресликава на мреже и у формализам, а непротивречност математике постаје коректност ове необичне дефиниције реалности засноване на ланцима интеракција.

Где год има енергије и промене има и дејства, па онда и информације, али и обрнуто, јер информација је у овом тумачењу *свеприсутна*. У таквом нема места за „апстрактни свет“, рецимо логичких истина који би био „тамо негде“ изван физичког и независан од њега. Овде све оно што опажамо мења нас, па и откриће Питагорине теореме упркос томе што ми не мењамо њу.

Апстрактна идеја истинитог става, која је свевременска је безенергетска (квант дејства је производ промене енергије и трајања), али пошто ми нисмо кадри појмити бесконачно дуго трајање, онда не добијамо нити бесконачно мало деловање. Не тврдим да бесконачности не постоје, узгред речено, него да је оно што из њих можемо преузети највише коначно.

За несиметричне интеракције не важи познати доказ Нетерине теореме изведен из Ојлер-Лагранжових једначина кретања и према томе нема закона одржања. То значи да „затворени“ псеудо-системи могу (не морају) губити (добијати) информацију и, посебно, из света математичких истина могуће је стално одузимати делове, а да он остаје једнако бесконачан.

Да *истина* има више од елемената било којег замисливог скупа гарантују нам Раселов парадокс (нема скупа свих скупова), затим доказ (Зермелове) теорије скупова да од сваке бесконачности постоји већа, па и Геделова теорема немогућности, а свет истина је и већи.

Другим речима, постоји могућност настајања садашњости филтрирањем информација из бесконачног псеудо-света истина. Кроз сито закона одржања информација и осталих принципа физике врши се сепарација апстрактних идеја у форме конкретне реалности. Упоредо са преузимањем из бесконачности, а зато што реалне информације „нестају“ у време када „настају“, дешава се и њихово гомилање у прошлост. При томе, за разлику од непромењене количине садашњости, за будућност и прошлост *закон одржања* постаје дискутабилан.

Свет прошлости је *псеудо* (лажан, једносмеран) већ због тога што се прошлост нагомилава, што се у њу нове количине садашњости стално таложе и формирају „лажну“ реалност другачију од апстрактних истина. Обе су информативне за (нашу) садашњост и кадре да на њу непосредно делују, али апстрактне истине то раде суптилно и скоро увек једнако једва, а прошлост то ређе што је старија. Попут дејства гравитације која опада са просторном удаљеношћу, утицај прошлости опада са временском.

Нова теорија информације повремено испада толико шокантна да је треба препричавати као неку бајку чак и ако верујемо да ту бајке нема. Али, недовољно је претпостављати да садашњост у будућности чека известан, статичан распоред догађаја, макар њихов избор сматрали неизвесним, у теорији која не може без објективних случајности. Чинили бисмо тада грешку као у интерпретацији Хајзенбергових релација неодређености врстом само наше необавештености, правећи тада теорију контрадикторну са Беловом теоремом о квантној спрегнутости.

Због изузетно слабог интензитета дејстава о којима говоримо, последице овог аспекта теорије информације лакше је видети у *космологији*. Познато нам је да је видљиви део свемира ограничен јер се његове све даље тачке све брже удаљавају од нас тако да нам измичу оне иза хоризонта догађаја – који се од нас удаљава брзином светлости. Зато је све више простора у односу на супстанцу унутар нама *видљивог свемира*.

Ширење свемира објашњавао сам принципом минимализма информације и то не бих сада понављао. Укратко, једно од објашњења је, *простор памти* а супстанца се топи у простор темпом спонтаног раста ентропије. Оно што је сада занимљивије је следеће хипотетичко питање: да ли је укупна количина (информације) простора и супстанце увек тачно константна и како бисмо то могли проверавати посматрањем?

На пример, зато што је супстанце све мање, ширење простора успорава (никада не престаје), осим ако из псеудо-света истина простор добија и додатне информације. Међутим, ако укупно доспевање будућности у садашњост супстанце успорава могло би и време свемира да успорава.

Да ли је то иначе неочекивана последица? Није, јер на пример, релативно спорији ток времена свемира произилази и из повећања „масе“ (енергије) његовог простора. Наиме, својства гравитационог поља можда иницира маса коју оно у једном тренутку садржи, али њих даље одржава простор који ту масу окружује. Показује се да је то у складу са Ајнштајновом теоријом релативности, иако изгледа као изненађење.

У теорији информације, сада одједном, добија смисао простор који постаје све, рецимо „дебљи“ да оставим за касније израз „бременитији“, па онда и његов посебан допринос релативистичким ефектима (релативном повећању енергије или успоравању времена тела у пољу) постаје видљивији.

Свет прошлости је лажан
`http://izvor.ba/`
29. маја 2020.

1.18 Количина опција

Слика екрана састоји се од мреже *пиксела* (тачака). Старији *телевизори* и многи 32-инчни имају их милион (720p), мање стари модели 49-инчни имају их нешто више од два милиона, а новији од 50 инча и више по осам милиона, до најновијих са по преко 33 милиона пиксела (8K). Да би се видео један пиксел таквог ТВ треба вам повећало.

Резолуција екрана односи се на број пиксела мреже која чини слику. Да не претерујемо, јер то није важно за поенту ове приче, држаћу се резолуције 720p која значи матрицу 1280 x 720 пиксела распоређених у ступце (колоне) који чине ширину екрана и врсте (редове) који чине висину.

Сваки се пиксел може контролисати напоном мреже која дефинише његово осветљење и боју. Светлина се дигитализује, каже се и квантизује, обично у осам бита са којима се постиже 256 (осми степен двојке) нивоа интензитета. Свака светлина иде у три основне боје ($3 \times 8 = 24$ бита) што чини *спектар* са више од 16 милиона осветљења и боја по пикселу (куб броја 256).

Помножимо ли број могућности спектра појединог пиксела са бројем њих у матрици добијамо количину опција екрана која је једноставан број могућности екрана. Сложенија врста *количине опција* је *информација*. Она није непосредан број избора, него је логаритам тог броја. Информација је и ствар контроле.

Све ретке матрице можемо поређати у један и пикселе (спектре) сматрати компонентама вектора. Делећи тај низ на два дела, а онда део који нас више интересује опет на два и тако даље стижемо до једног пиксела. Број подела је логаритам (базе два) броја свих и он је информација резолуције екрана. Када су пиксели истих могућности ова информација је *Хартлијева*[30], названа према инжењеру Белове компаније који ју је 1928. године први дефинисао.

Један *бит* је једна позиција са две могућности, има-нема струје или 1 и 0 и основна је јединица информације. Три бита имају осам могућности (два на трећу потенцију, $2^3 = 8$), пет бита 32 могућности (два на пету, 2^5), а производ броја могућности ($8 \times 32 = 256$) јесте збир информација тих могућности ($3+5 = 8$). То је својство логаритама које је Хартли уочио омогућивши Беловој телефонској компанији да почне мерити потрошњу информације аналогно потрошњи воде или струје.

Исто се односи на сабирање „количине неодређености“ случајних догађаја која се онда такође назива информацијом. На пример, два су исхода бацања новчића, а шест бацања коцке. Бацање уједно новчића и коцке има $12 = 2 \times 6$ исхода, а њихова информација једнака је збиру појединих информација новчића и коцке. Логаритам броја 12 једнак је збиру логаритама двојке и шестице.

Информација спектра пиксела (8) множена тренутним интензитетом пиксела (број од 0 до 256) јесте текућа активност пиксела, а збир свих тих је укупни интензитет слике екрана у датом тренутку. Када пиксели повремено нису активни него се укључују по некој расподели (независних догађаја вероватноћа јединичног збира), онда ће збир производа вероватноће и одговарајуће информације дати просек информације појединог пиксела.

Тај просек је *Шенонова* дефиниција информације. Назив је по математичару који ју је установио 1948. године, такође радећи у Беловој компанији. Огроман број теоријских радова о капацитету канала који преноси информацију, о Марковљевим ланцима, ергодичком извору, крипто кодовима и њихових примена, потврђују исправ-

[30] Ralph Hartley (1888-1970), амерички инжењер.

ности идеја Шенона и Хартлија.

Приметимо даље да варирање нијанси у овим дефиницијама даје „изненађујуће“ велике разлике значења појмова. То је типично за математику и чест је узрок њеног наводног неразумевања од стране лаика, а када се ради о новим открићима онда и разлог неспоразума међу познаваоцима.

Информација перцепције је следећи корак у теорији информације. Она поопштава претходне две дефиниције, а тиче се физичког дејства. На пример, емисија слике екрана је и ствар потрошње или емисије енергије током задатог времена. Множећи јединичну информацију енергијом и сабирајући по спектру и резолуцији добијамо збир производа парова два низа вредности, збир производа компоненти два вектора, који називамо информацијом перцепције.

Компоненте вектора представљају поједине димензије векторског простора и њихов број може бити огроман. Међутим када два таква полазе из истог исходишта они леже у једној јединој равни, кажемо разапињу паралелограм. Површина коју вектори разапињу једнака је производу интензитета вектора и синуса угла између њих. Поред тога ту су и њихове узајамне пројекције које настају множењем интензитета и косинуса истог угла. Обе ове вредности важне су у теорији информације перцепције, али нису данашња тема.

Заједничко трима дефиницијама информације је њихов раст са растом броја опција и неизвесности. Информација исхода опада са вероватноћом, па принцип чешће реализације вероватнијих догађаја постаје принцип ређе реализације информативнијих.

За разлику од претходне две дефиниције, информације перцепције нема без енергије односно дејства (нема промене енергије без времена). Поменуто, а иначе ново, начело минимализма информације еквивалент је одавно у физици познатог начела најмањег дејства. Затим се потврђује да за информацију (перцепције) важи закон одржања, попут одржања енергије, па одједном излази да такав неки закон мора важити и за саму вероватноћу.

Теорију „информације перцепције“ развијам прилично усамљено, али из година рада видљиво је да она отвара Пандорину кутију не само чуда унутар математике и физике, него од друштвених појава, преко биологије, до технологија вештачке интелигенције. Отуда толико много наставака ових пажљивије гледано веома различитих прича о информацији.

Резолуција количине неодређености
`http://izvor.ba/`
5. јуна 2020.

1.19 Токови догађаја

Квантна физика дели елементарне честице на бозоне и фермионе. Спин (унутрашњи магнетни момент) бозона представља се целим бројем, спин фермиона половичним. Поља сила чине бозони који своја дејства испољавају на одговарајуће фермионе. Бозони толеришу себи једнаке на истом месту (догађају простор-времена), фермиони не. Само помињем познате особине.

Делови електромагнетног зрачења, фотони којима припада и видљива светлост, врсте су бозона – толерантних честица. Оне се узајамно не сударају, него се игноришу, мимоилазе или интерферирају, а компоненте беле светлости као елементарне боје добијамо преламањем кроз *Њутнову призму.* Она нам онда показује и да постоји структура

кванта (фотона беле светлости) закључана у неком процесу кохеренције са сопственим законом одржања.

Унитарни оператори (процеси) квантне физике потврђују овакав закључак свугде. Тиме што су *реверзибилни* (инвертибилни, регуларни) ови линеарни оператори, квантне еволуције, чувају информацију. Случајеве игнорисања бозона од бозона њима можемо додати као врсту узајамне независности. То је незаинтересованост слична свакодневној у толерисању некога, нечијег понашања, увреда или похвала које би изазвале реакције блаже од нормалних, на које би се мање обазирали него уобичајено, или нас не би дотицали и биле нам небитне.

За фермионе важи Паулијев принцип искључења: два идентична не могу бити у истом квантном стању. На пример, не могу два идентична електрона бити у истом атому. Електрони комуницирају помоћу *виртуелних фотона* који су увек негде около, док сами фотони немају такву згоду. То је познат процес *Фајнманових*[31] дијаграма, а призвук његових шема који сада ослушкујемо је да случајно узета врста честица комуницира са фермионом пре него са бозоном.

Виртуелни фотони непрестано напуштају дати електрон и уколико неки од њих интерагује са другим електроном фотон постаје реалан и два електрона се електрично одбијају Кулоновом силом. Као код чамаца на води када из једног бацимо врећу песка у други, одузети импулс фотона од првог електрона додаје се другом.

Зато има више смисла говорити о фотонима без електрона него обрнуто, о електронима без фотона; као да постоји тежња да има више фотона него електрона. Са квадратом удаљености између електрона опада вероватноћа те интеракције али је њена количина константна, па (од недавно) претпостављам да се виртуелни фотони шире као концентричне сфере таласа, са вероватноћом деловања у све мањим амплитудама развученим по површини сфере и константним импулсом интеракције у њеној таласној дужини. Међутим ни то није довољно да објасни откуда оволики (виртуелни) фотони долазе и шта ако се не реализују сви.

Поред тога, познато је да се у поменутој размени рецимо спин првог електрона $+1/2$ умањује за спин фотона, тада $+1$, а другог се за толико увећава, што значи да је спин другог електрона морао бити $-1/2$. Следећа размена може бити само обрнута, да се спину другог електрона одузме јединица и дода првом. Отуда следећа примедба да је процес размене (виртуелних) фотона између електрона веома селективан. У томе видим потврду „чудне“ нове идеје о „преузимању садашњости из бесконачног“ која приличи теорији свеопште информације.

Чак и ако претходно нисте сматрали спекулативним, наставак вероватно хоћете. Држећи да свако догађање мора ићи са променом неког дејства (чит. информације) и обрнуто, требало би да сазнање Питагорине теореме (или било које друге) делује на нас.

Међутим, моћ деловања апстрактне истине зависи од објективне количине перцепције, а она је увек нека коначна вредност. Без обзира што је (ако је) рок трајања теореме бесконачан и енергија коју би таква могла пренети зато ништавна, свако физичко опажање увек је коначно. Истичем још једном, производ енергије и времена је физичко дејство (информација) са позитивним минимумом (квантом) чији један множитељ (време) ако неограничено расте, други (енергија) неограничено опада.

За физичка дејства као и за енергије важе закони одржања и то су зато коначне величине. Коначности физичких величина могу преузимати делове бесконачног у

[31] Richard Feynman (1918-1988), амерички теоријски физичар.

складу са законима физике и својом моћи перцепције, а да при томе бесконачност остаје непромењена, јер је њено основно својство да може бити свој прави део. Одузимајући (додајући) бесконачности извесне количине она може остајати иста, што са коначнима није могуће.

Ови познати ставови математике још увек немају своју примену у физици и сада их надовезујемо на свет елементарних честица. На горњу (хипо)тезу, да је мање вероватан „доток садашњости“ (из бесконачног) бозонима него фермионима, даље додајемо раније поменуто „топљење супстанце у простор“, дакле фермиона у бозоне. Идеја о оваквом току догађаја долази из начела минимализма информације, али се може извести и из (генералисаног) спонтаног раста ентропије твари. Свеједно, простора васионе је све више а супстанце све мање.

Зато што простор старењем постаје све „дебљи“ и зато што је он крајњи носилац гравитационог поља – релативно време успорава. Због пораста енергије самог простор-времена расту вредности тензора енергије на десној страни Ајнштајнових општих једначина поља, па ову појаву можемо сматрати новим-старим ефектом гравитације. То пре што гравитационо привлачење увек вуче ка споријем току времена чиме поменуто увећање простора поприма карактер гравитационог.

Са друге стране оправдано је рећи да време тече све спорије и зато што је све више бозона а све мање фермиона. Све су мање вероватне интеракције садашњости са бесконачним и све су ређи преноси у физичку реалност, а релативну брзину тока времена у теорији информације иначе дефинишем опаженом „количином догађаја“.

Делује ли на нас Питагорина теорема?
`http://izvor.ba/`
12. јуна 2020.

1.20 Дихотомија

У религији, етици, филозофији и психологији *добро и зло* су уобичајена *дихотомија* (подељеност целине на два једнака непреклапајућа дела). Било да се деси развој теорије информације на начин како је замишљам и она се умеша у те, за сада нематематичке појмове или не – занимљиво их је разматрати. Осим тога, оне су информатичке више него чврсте појаве.

Полазно начело информације је њена *свеобухватност*. Искрено речено, пре више година замишљао сам „себи довољан“ универзум информација само као покушај у тражењу контрадикције и то је тако остало до дана данашњег. Свођење на противречност је моћан метод математике, њој типичан, проверен и поуздан, али се често показује претежак и не можемо на њега увек рачунати.

Дедукција је такође метода математике, иначе безвредна када на почетку сваког ланца „ако је, онда је“ не стоји нека проверена истина. У том смислу она је секундаран начин крајњег истраживања (експеримент је врста доказа контрадикцијом) и зато је примарна у манипулисању истином (ради забаве, маркетинга, у политици). Тај претпостављени тачан почетак ланца импликација у теми „добра и зла“ могао би бити универзалан могућности пресликавања „тачног“ у „нетачно“ и обрнуто. Ово је очигледно у операцијама Булове *алгебре логике*.

Те се операције лепо слажу са поменутим принципом свеобухватности, овај са налазом да је информација дејство, а он даље са схватањем да дејство мора бити нешто што је тачно. Тако долазимо до закључка да се свету истина *бијекцијом* (обострано

једнозначним пресликавањем) придружује свет лажи, до сасвим нове тезе са огромним импликацијама. Наглашавам, све оно што се може догодити тачно је, али не мора нама бити доказиво и, опет, све што је доказиво не мора нама бити доступно.

Теорија информације о којој причам подразумева неке случајности, отуда непредвидљивости, немогућности да све комуницира са свачим, а онда и ограничености перцепција било којег субјекта (живог или неживог бића, тела или честице физике), па је она сама по себи у складу са исказаним ставом, да лаж није оно што смо мислили да јесте.

Испада да наизглед страни *свет лажи* садржи тачно једнако много истина, штавише и оних истих које се налазе у нама познатијем *свету истина*, пакованих на нама теже доступне начине. То је први корак, да универзум информација видимо са том унутрашњом симетријом, са најлакшим начином сазнавања читањем непосредних истина, а осталима заморнијима. Следећи корак је придруживање појединачном појму „доброг“ (по једне) логичке вредности „тачно“.

Идеја све мање и мање доброг да бисмо на крају стигли до „зла“ сада не функционише, јер би се тако свела на поливалентне логике (тачно, можда, нетачно) и тамошњу теорему да се свака та вишезначна логика може извести из двовалентне (тачно, нетачно). Такође, нема више ни дихотомије добра и зла, и поставља се питање какав би овај свет могао бити?

Када је пре близу 66 милиона година огроман метеор пао на Земљу и побио *диносаурусе* који су стотинама милиона година доминирали планетом, отворена је могућност да се развијају и завладају сисари и на крају људи. Крчењем шума чини се добро некима, али и ускраћује животна средина другима и ко зна каква штета се чини овој планети а онда и нама на њој. Подржавањем донацијама неуспешног предузећа непознатом самоодрживом не дозвољава се постојање.

Укратко, добро и зло могли би бити релативни појмови зависни од посматрача. То гледиште у складу је са информацијом перцепције, напомињем још једном, јер она вреднује перципирање ствари увек релативно, у односу на дати субјекат. Ми комуницирамо јер немамо све што желимо, нити то можемо икада имати, а због ограничења перцепција свет је онда увек бар мало различит за различите субјекте.

Зато што је суштина информације неизвесност, а информација је универзална (све што постоји има је и без ње ништа не постоји), то ни један субјекат не може знати све; не постоји становиште, нити становишта, са којих би се могла извести укупна свеопшта и универзална истина. Ово би био евентуални доказ *Геделове теореме о непотпуности* изведен помоћу наведене теорије информације, или рецимо доказ немогућности егзистенције скупа свих скупова (Раселов парадокс), али, за сада, он је само налаз и још једна потврда ове теорије.

У оној древној изреци да у сваком добру има нешто лоше и у сваком злу има доброга, за сада нагласимо: једном добро, другом лоше. Нешто што је категорије „лоше“ за све наше досадашње цивилизације може бити „добро“ за неку будућу, или за неку другу живу врсту око нас, али и не мора. Пресликавања између „доброг“ и „лошег“ могу бити раздвојена космичким удаљеностима или еонима, али увек су делови универзума информација.

Да је овакав модел логички могућ скицираћу доказ помоћу теорије графова. Нека су дате неке тачке, чворови графа, са или без повезница између парова. На крају повезнице може стајати стрелица (плус) ако је та веза за дати чвор „добра“, иначе је „лоша“. Ако између два чвора постоји повезница она може имати две, једну и ниједну стрелицу. Међутим, могућ је граф у којем сваки чвор са повезницом „добар“ има и

повезницу „лош“.

На пример, чворовима А, Б и Ц доделимо значења редом: опстанак диносауруса, разорну моћ метеора и развој сисара. Тада је А → Б, Б → Ц и Ц → А. Прво тумачимо да за опстанак диносауруса лошије утиче већа разорна моћ метеора, затим да већа разорна моћ метеора олакшава развој сисара и треће да развој сисара почиње крајем опстанка диносауруса. Сваки од три чвора за један је „добар“, а за други је „лош“.

Једном добро, другом лоше
`http://izvor.ba/`
19. јуна 2020.

1.21 Фикција

Фикције у свакодневном говору означавају стварања засебног света путем књижевности, филма, сликарства или уопште уметности, али и нетачне идеје које нам се мотају по глави. Сматрамо да *фикцију* могу имати само жива бића, а да је углавном различито доживљавају.

Иако је изван материјалистичких модела света, њу чине неки подаци који могу да нас покрећу и стога је она део универзума информација. Иза сваке информације стоји неко дејство и обрнуто – са сваким дејством иде нека информација, па је фикција тема „физике информација“. Њен важан део је разумевање реалности помоћу комуникације.

Ако две појаве могу непосредно комуницирати, рећи ћемо да су оне узајамно непосредно *реалне*, а ако непосредне комуникације нема, али постоји трећа појава која би могла комуницирати са обе, онда су прве две (само) узајамно реалне. Тако су узајамно реални фотони, јер могу комуницирати путем електрона и нису непосредно узајамно реални, јер не комуницирају непосредно. У свету информација све појаве су реалне, не само примарне или секундарне.

У секундарне спада псеудо-реалност са којом „комуницирамо“ једносмерно. Она може деловати на нас, али не и ми на њу, као (ваљда) математичка теорема или прошлост. Постоје и фиктивне појаве које могу деловати на нас и ми на њих, али чију информацију различити субјекти примају различито. Бог је делом и псеудо-реалност и фикција, а примере преклапања фикције и реалности имамо у квантном свету. Појаснићу ово друго.

Ако процес A неће битно мењати стање x, онда имамо карактеристичну једначину $Ax = x$, иначе је неко $Bx = y$. То је абецеда *квантне механике*, при чему су A и B унитарни оператори, а x и y вектори. За композиције ових процеса важи $ABx = Ay = z$ и $BAx = Bx = y$, па када је $z - y = x$ имамо Хајзенбергове релације неодређености и, уопште, ако z није y, имамо некомутативност процеса A и B и реалност се преклапа са фикцијом.

Приметимо да је сличан формализам квантних оператора и вектора примењив и на макросвет физике, са јасним раздвајањем фаза, операција A и B. Када нема ограничења релацијама неодређености онда нема мешања реалности и фикције. А како је сваки (унитарни) оператор могуће растављати на факторе то онда имамо сложеност (композицију) процеса све до њиховог уситњавања до дна микросвета.

У микросвету је, наравно, могуће и даље разлагање на чиниоце оператора елементарних процеса, али такви не могу бити изолована дејства. На пример, свака од три *Паулијеве матрице* раставља се на производе по два (од три) *кватерниона*, сваког са

неким својствима несамосталних процеса. Елементарне честице такође чине нерастављиви делови. Разноврсни начини факторисања тако нам говоре о неједнаким перцепцијама истих појава квантног света.

У макросвету, жива бића разликујем од неживих по акумулацији информација (дејстава). Живо биће је оно које сложеношћу и *синергијом* постиже вишак информације у односу на збир одвојених својих чинилаца. Отуда оно има вишкове могућности бирања. Нежива, физичка твар подлеже принципу најмањег дејства тако да се креће трајекторијама које су решења Ојлер-Лагранжових једначина, жива може још тога да бира.

У квантном свету не разматрамо жива бића, али због доминантније неизвесности, односно случајности, избори честица микросвета сразмерно су већи. Откуд ова разлика? Пре свега она је последица *закона великих бројева* теорије вероватноће, који „великом свету“ повећава извесност, затим је ту и поменуто мешање реалности и фикције својствено „малом свету“. Резултат је одсуство природне фикције у свету великог и одсуство живота у свету малог.

Вишак информације који настаје синергијом посебно је занимљив феномен. Он настаје слично вишку дејства *олуја* које се роде, разбацају и заврше у пар сати, или могу трајати и трајати попут „Велике црвене пеге“ на Јупитеру, пркосећи начелном минимализму. Шкртарењем емисијама информације настаје и вишак и мањак виталности, као што тежња за што мање дејства рађа и олују и њено смиривање.

Привлачност дефицита информације држи електрон у атому из којег га може избити само извана додат вишак (фотон), али и такав веома селективно. Зато што је информација еквивалентна производу енергије и времена (дејству), а јединице времена у случају атома можемо унифицирати, онда мањак информације интерпретирамо негативним потенцијалом.

Негативна *потенцијална енергија* је привлачнија од позитивне када представља мањак информације, па је тада позитивна потенцијална енергија одбојна. Дубљи узрок овога је, понављам, принцип минимализма информације, једна веома блага, свеприсутна и упорна сила. Са друге стране су разноликост и пробирљивост иманентне свету информација који пркоси првом и подстиче настанак олуја и живота.

Кроз стварања вишка у свеопштој тежњи ка мањку или подметања неистина у бежању од лакших облика истине, привидних дихотомија, фикција и разних других израза принципа информације, тежње природе да не делује док се сва састоји само од дејстава, невероватне су.

Бог је и псеудо-реалност и фикција
`http://izvor.ba/`
26. јуна 2020.

1.22 Светлост

Светлост је треперење вакуума. Број титраја у секунди, фреквенције f од 400 до 790 терахерца, чини информацију о боји светлости: од црвене, преко жуте, зелене, плаве до љубичасте. Енергија светлости $E = hf$, па према томе и боја, зависе само од броја осцилација. Планкова универзална константа h је и најмање физичко *дејство*.

Фреквенције изван датог (светлосног) опсега припадају осталим фотонима, најмањим честицама-таласима електромагнетног зрачења. Дејство, производ енергије E и трајања t, еквивалент је информацији, а опције које би фотон могао имати можемо свести

на неки средњи број N једнако вероватних исхода, тако да је је логаритам тог броја ($\ln N = kEt$, са константом k) управо *информација фотона.*

Број N, нумерус логаритма, експоненцијална је функција дејства, $N = \exp(kEt)$, а реципрочна вредност је вероватноћа једног од равноправних исхода, $P = \exp(-kEt)$. Ако константа k припада скупу комплексних бројева, ове вероватноће примају познати облик таласне функције и, штавише, решење су Шредингерове једначине за слободну честицу уопште.

У овом популарном објашњењу намерно не избегавам поменуте „лаке“ формуле због демонстрације једноставности (моје) теорије информације. Иначе, ово је једна од најтежих тема егзактних наука, а сама Шредингерова једначина једно је од два епицентра тачности и тешкоћа интуитивног разумевања квантне физике. У наставку приче је таласна природа честица, интерференција и проблем облика.

Када је поменута константа k комплексан број, горња експоненцијална и логаритамска функција постају периодичне и пренос енергије фотона је талас. Као и водени талас који енергију воде помера хоризонтално, окомито на њене молекуле које се крећу вертикално, фотон је талас вакуума без других веома многобројних опција вакуума.

У званичној физици *интерференција* је појава узајамног утицаја таласа чији резултат може бити њихово појачавање, слабљење или поништавање. То се сматра веома сложеним физичким процесом који се дешава при интеракцији таласа у корелацији или кохеренцији, било зато што долазе из истог извора или због (скоро) исте фреквенције. Интерференцију познају све врсте таласа, светлосни, радио, звучни или на пример таласи водене површине.

За нас овде интерференција је паковање информација више таласа. Прост талас путује хоризонтално одступајући правилно и периодично горе-доле од главног правца попут графа синусоиде. Сложени талас добијен интерференцијом више њих представљала би кривуља чији се делови такође таласају на практично безбројне начине. Поремећаји синусоиде опет су периодични и представљају „отисак прста“ присутних таласа.

Интерференцијом видљиве светлости добија се *бела боја.* Њу је могуће разложити на елементарне пропуштањем кроз Њутнову призму, што је поред осталог и доказ да интерференција не уништава структуру својих компоненти, те да не постоји значајна интеракција фотона. Фотони се међусобно толеришу јер су врста бозона.

Има и другачијих тумачења облика фотона. На пример, фотоне као фелшаве лопте недавно је описао један индијски физичар (Narendra Swarup Agarwal, 2015). Показао је да и оне могу остављати траг сличан синусоиди и опонашају паковање информација интерференцијом. Овде ту различитост тумачења облика, пак, схватамо да за фотоне није битан облик.

Последње схватање можемо извући и из математике. Наиме, безмало било који део произвољне функције може се употребити да би са унапред датом тачношћу конструисали периодични интервал скоро сваке друге функције (Фуријеова трансформација, 1822). То даје могућност представљања „облика“ и фотона на безбројне начине. Другим речима, не сматрам најбољим инсистирање на (јединственом) облику фотона.

Принцип минимализма информације је посебан зачин науци о фотонима. Он налаже да информација настаје када и нестаје, као да не жели да постоји али не може измаћи закону одржања. Светлост и све друге елементарне информације зато просто речено титрају јер имају неку количину података којих би се радо решиле да могу. Доследно даље, информације се удружују, синхронизују и интерферирају и своје слободе утапају у групу. Тако ће се рецимо електрон, тежећи минимализму, придружити атому и отарасити једног фотона.

Са новим разумевањем фотони су и попут таласа на „мору“ вакуума. Они су вишак и поремећај који се креће по „површини“ огромне „масе“ простора чија „унутрашњост“ је прошлост која се стално таложи. Простор је такође информација, па ни свемир ни у која два тренутка није једнак себи, он је увек вест да би могао постојати у „универзуму информација“.

Сходно таквој (хипо)тези, честица-талас данас могла би интерферирати са одговарајућим таласом који је јуче прошао истом путањом. Потврду овог чудног закључка можемо тражити у ванвременској природи неких једначина квантне механике, на пример, у израчунавању интерференције фотона са самим собом док он пролази кроз два уска прореза.

Квантна механика тај иначе *Јангов*[32] експеримент (1802) за доказ таласне природе светлости користи и за доказивање таласне природе других честица, а збуњујућу интерференцију изолованог кванта (најмањег пакета таласа вероватноће) са самим собом за сада тумачи само његовим цепањем ради истовременог проласка кроз два отвора и интерференције делова након.

Нови зачини у науци о фотонима
`http://izvor.ba/`
3. јула 2020.

1.23 Гравитација

Основна „сила“ теорије информације (коју заступам) долази из начелног минимализма комуникације, из (хипо)тезе да природа преферира мању емисију информације као што радије реализује вероватније исходе случајних догађаја. Тај концепт виђамо свуда.

На пример, он је у својству вести да поновљена бледи или да нас превише информација дезинформише, да се у мноштву податак скрива као игла у пласту сена. Тежња сазнања да се маскира, на свој начин, налази се и у закону великих бројева (ЗВБ) теорије вероватноће. Умањујућа неизвесност већег мноштва такође је смањење слободе праваца кретања честица које се нађу у маси – због већег приоритета центра њима генерисане *гравитационе* силе.

Апстрахујмо ЗВБ од гравитационог поља велике масе (честица материје или енергије) и опет ћемо добити већу извесност. Добићемо мањи доток садашњост и, према „теорији информације“, спорији ток времена. Релативно време тече брзином коју дефинише количина реализованих случајних догађаја. Из опште теорије релативности имамо исти закључак о релативном опажању времена уз напомену (раније сам писао опширније) да је дефицит релативног времена у односу на сопствено тачно једнак вишку сопственог присуства у паралелној-реалности.

На другом крају скале, у квантном свету малих величина, неизвесности су таман доминантне да честица нарушава законе (велике) физике; она (привремено) изостаје или се дуплира (истовремено). Њено вишеструко појављивање довољно је учестало да би она сама са собом могла интерферирати пролазећи кроз „двоструки отвор“. Сада причам о чувеном Јанговом експерименту (Young's double-slit experiment, 1802) којим је својевремено доказана таласна природа светлости, а који данас збуњује физичаре више него икада.

[32] Thomas Young (1773-1829), енглески научник.

Фотони (али и друге честице) када се усмеравају појединачно ка застору са два блиска прореза пролазиће као да сами са собом интерферирају и на екрану иза формираће карактеристичне траке *дифракције*. Ову појаву је, верујем (раније сам наводио), уочио *Еверет*[33] (1957) и описивао као интерференцију копија исте честице у *много светова*. Због сличних „копија“ за које је сматрао да настају где год имају неку шансу, он је толико омаловажаван од академске заједнице да је напустио рад у науци.

Пристрасност јединке окружењу могуће је израчунавати скаларним множењем вектора који у квантној механици представљају суперпозиције, вероватноће евентуалних исхода у обзервабле. Компоненте вектора дају расподеле опажања обзервабле (Born's law, 1926) у односу на дате околности (квантни систем), па скаларни производ који никада није већи од производа интензитета самих вектора (Schwarz inequality, 1888) није већи од један. Отуда и тим производима значење вероватноће.

Наиме, вектори квантних стања (честица) представљају расподеле вероватноћа и они су зато јединичне норме (интензитета). Њихови скаларни производи (збир производа одговарајућих парова компоненти) нису већи од производа њихових норми, од један, те имају вредности вероватноћа. Стања се удружују ако су у прилици да вероватноћа њихове спреге буде већа и она тада гравитирају мање информативном.

Претпоставка је да сличан механизам покреће еволуцију живота уопште и посебно да крда чини склоним потчињавању или људе удруживању.

Разне су последице овога, а једна од њих је постојање граница. Гомилање неизвесности увећава број појединих, али смањује њихов значај и утицај. Пораст једних и пад других вредности срећу се у неком екстрему који називамо *оптимумом*.

Оптимално је, рецимо, стање сателита у слободном паду у гравитационом пољу када његови субјекти не осећају вањско привлачење. Ма какво да је гравитационо поље около, унутар сателита у датом тренутку нема га. Може се доказати да је то стање најмањег деловања, јер се сателити крећу геодезијским линијама која су решења Ојлер-Лагранжових једначина. То су трајекторије изведене из принципа најмањег дејства физике из којих је могуће извести и Ајнштајнове опште једначине поља.

Информација је еквивалент дејству и у том смислу се сателити крећу по орбити држећи се горе поменутог начела минимализма комуникације. Стање минималне комуникације стање је минималне емисије информације а оба иду са највероватнијим случајним догађањима и стањем максималне ентропије. Све ове појаве еквивалентне су и међусобно и са *принципом инерције* откриваним од Галилеја (1590), Њутна (1728) и Ајнштајна (1916).

Од како заговарам везу између спонтаног раста (генералисане) *ентропије* и привлачне силе гравитације неки ме (добронамерни и остали) исправљају да ентропија јачег гравитацоног поља мора бити већа, јер забога, кажу, оно је зато привлачно, а теби се „поткрала грешка“ у обрнуто тврђење. Помињем ово као један упоран неспоразум.

Највећу релативну (сопствену) ентропију има тело у стању слободног пада када се молекуле гаса у просторији равномерно распоређују. Мања је ентропија тела које стоји на месту испод или изнад орбите, јер се молекуле тада неједнако распоређују, оне ниже су гушће. Тако би то било према *Болцмановом* статистичком тумачењу ентропије (1872), али и *Шеноновом* (1948) где пораст ентропије значи губитак информације.

Дакле, мања је ентропија непокретне тачке у јачем пољу а већа у слабијем и увек је мања од ентропије сателита у орбити (на геодезику). Зато се сателит креће, или поље се креће у односу на сателит. Уопште је највећа ентропија тела у релативном мировању,

[33] Hugh Everett III (1930-1982), амерички физичар.

када му је најмања информација, па оно неће спонтано прећи у стање кретања и отуда *закон инерције*.

Ентропија и упорни неспоразуми
http://izvor.ba/
10. јула 2020.

1.24 Много светова

Према „теорији неизвесности“ информација и дејство су еквивалентни појмови, па су то комуникација и интеракција такође. Сва реалност састоји се само од информација, а ова од неизвесности, што значи да је спознаја нечега увек могућа, а свега немогућа. Даље следе последице које некоме могу изгледати толико спекулативне да их је боље прећутати.

Кажемо да су примарно реална два субјекта (честице, тела, људи) која могу непосредно комуницирати, а ако постоји трећи са којим могу комуницирати оба, онда су они секундарно реални. Релацију *реалности* постављамо тако да бисмо дискутовали њену транзитивност (ако је A у релацији са B и B је у релацији са C онда је A у релацији са C). Циљ је Еверетов предлог *много светова* квантне механике и „теорија информације“, а ево како.

Рецимо да прихватимо објашњење експеримента *двоструки отвор* помоћу поменутог мултиверзума (егзистенције секундарних реалности које нису примарне) и прихватимо „фантазију“ да у случају два места на којима се честица-талас може наћи она остаје у реалности на једном, а одлази у паралелну (секундарну) реалност на друго. Ако и у „другој“ реалности она има исте изборе, постоји шанса да се иста честица опет појави у примарној реалности, сада као дупла. У *Еверетово* време (1957) овакве идеје биле су сулуде.

Данас из експеримената знамо за двострука појављивања исте честице-таласа, те ово објашњење њене интерференције са самом собом вреди разматрања. Неизвесност је толико доминантна у „малом свету“ да је тамо поменути опис значајнији, да је појам реалног релативан, а питање је сада можемо ли такав опис некако увести и тестирати у „великом свету“ физике?

Свако тело је неко мноштво честица и његов део увек комуницира са паралелном реалношћу. Да ствари поједностависмо говорићемо о некој средњој вредности броја честица тела у датој ситуацији под којом подразумевамо како саме честице тако и њихове положаје и тренутак. Попут рецимо просека тежине групе особа чију вредност нема нити једно од присутних, ми ту замишљену просечну вредност можемо употребљавати у одговарајућем рачуну.

Нека је прво тело које посматрамо у близини, на удаљености r од, неког другог знатно већег тела масе M, а ми смо далеки релативни посматрачи. Кажемо да смо ван система два тела. Према горњој дефиницији реалности, све честице првог тела реалне су са сопственим, али нису обавезно реалне са релативним. Онај део првог тела који није део реалности трећег, дефицит релативне реалности првог тела, пропорционалан је укупној маси два тела (приближно M). Томе је пропорционалан и дефицит релативног броја догађаја који се (првом) телу дешава. Подсећам, простор, време и материја су саме информације.

У *теорији информације* број случајних догађаја дефинише време. Сопствено протекло време нека је t а њему одговарајуће релативно опажено означимо са t'. Дефицит

релативног времена пропорционалан је укупној маси два тела, $t' - t = t'kM$, где је коефицијент k неки веома мали број који опада са удаљеношћу r. Отуда израчунавамо дилатацију (успоравање) релативног времена, $t' = t/(1 - kM)$. Овако писан резултат можемо упоређивати са познатим из опште теорије релативности.

У *Ајнштајновим* општим једначинама поља, $G_{ij} = T_{ij}$, лево је тензор геометрије простор-времена, десно енергије, а индекси i и j узимају вредности три просторне и једне временске координате. *Шварцшилдово*[34] решење ових једначина важи за слаба централно симетрична гравитациона поља каква су Месечево, Земљино или Сунчево. Оно се приближно (веома тачно) поклапа са Њутновом гравитацијом, али га уобичајено представљамо помоћу интервала простор-времена израженог коефицијентима g_{ij}, тзв. *метричког тензора.*

Када радимо са ортогоналним (окомитим) координатама у сферном систему, од $4 \times 4 = 16$ могућих коефицијената метричког тензора, свих 12 са различитим индексима су нуле, а преостала четири дефинишу Ајнштајнову *Питагорину теорему*, тј. квадрат дужине „дијагонале“ изражен збиром квадрата „катета“ 4-Д простор-времена гравитације. Посебно „временски коефицијент“, g_{44}, који стоји уз квадрат временске координате поменутог интервала, а који је већи од један, изражава (успорену) брзину тока времена тела у гравитационом пољу.

Занимљиво је да тај коефицијент одговара и горњем резултату за дилатацију релативног времена предвиђаном на основу Еверетове идеје „много светова“, те да су успоравање времена које произилази из претпостављених паралелних реалности и (хипо)теза да је проток времена сразмеран броју реализација случајних догађаја, ипак сагласни и са теоријом релативности.

У овом редоследу излагања тражена је потврда идеје паралелних реалности у Ајнштајновим општим једначинама, иначе заснованим на (Галилејевом, Њутновом, а онда и Ајнштајновом) принципу инерције. Али, ако једном прихватимо поставке „теорије информације“ из њих ћемо на описани начин изводити Ајнштајнове једначине, тада необавезно помињући инерцију. Принцип инерције остаће посебан случај принципа (минимализма) информације.

Коефицијент метрике простор-времена, g_{44}, иначе говори о релативном протицању времена. Сам је Ајнштајн знао рећи да гравитација вуче тела ка споријем времену, а сада додајемо, јер је мањак информације привлачан.

Много светова квантне механике
`http://izvor.ba/`
17. јула 2020.

1.25 Меморија простора

Простор памти. Он је магацин прошлости коју видимо са светлошћу и другим честицама из далеких звезда, у удаљавању галаксија из којег читамо старост васионе, у наслагама „сећања“ у односу на које се убрзава вода у лавору док се окреће и просипа, затим можда и у траговима те меморије које називамо *тамном материјом.*

Светлосна година је пут који светлост пређе за годину дана брзином око триста хиљада километара у секунди. Најближе звезде Земљи су три у систему Алфа Кентаури удаљене од нас мало више од четири светлосне године. Оне су нам најближе осим Сунца

[34] Karl Schwarzschild (1873-1916), немачки физичар.

које је од Земље удаљено скоро 150 милиона километара, стохиљадитом делу светлосне године.

Пречник *галаксије* „Млечни пут“ (енг. Milky Way) износи 100-180 хиљада светлосних година. Ту је наш сунчев систем са још можда до 400 милијарди других звезда. Млечни пут је део локалне групе од 54 правих и патуљастих галаксија, формације која се назива „Девичанска супергрупа“ (Virgo Supercluster) пречника већег од 110 милиона светлосних година. Процењује се да у видљивој васиони постоји бар 200 милијарди галаксија, а најудаљенија до данас откривена је галаксија MACS0647-JD, на око 13,3 милијарди светлосних година од Земље.

Удаљености између самих галаксија, мегагалаксија и квазара су много веће од међузвезданих, оне се крећу у границама од неколико стотина хиљада до више милиона светлосних година. Те удаљености нису сталне и просечно непрестано расту током времена, па претпостављамо да се свемир стално шири, а онда израчунавамо да је његово ширење почело пре око 13,8 милијарди година са „великим праском“ (Big Bang).

Електромагнетне таласе, који из дубине свемира хиљадама година путују до нас брзином светлости, астрономи читају помоћу Доплеровог ефекта и других закона физике. Они сведоче о древним местима са којих су кренули са чиме наука увек има неких нових дилема. На пример, опажено брже удаљавање даљих галаксија могло би значити њихово брже кретање у прошлости и убрзавање ширења свемира, заједно са успоравањем времена садашњости.

Из (моје) „теорије информације“ је хипотеза да би опажено ширење простора могло бити последицом *памћења простора*. Током кретања честица комуницира са простором. Она заробљена начелом конзервације и минимализма траје и покушава да нестане, а зато што је све што се догађа информација, такве су и њено трајање и њена историја. Како елементарна честица не „расте“, не гомила информацију у себи, настали вишкови остају успут.

То је наводни информатички приступ. Други начин да се приђе овом питању је математика квантне механике. Хилбертови вектори су квантна стања, дакле честице. Али вектори (дуални првима) су и оператори над њима. То значи и процеси су „честице“ (дуалне првима) и као такви записани су у простор-времену. За процесе такође важе закони одржања који доводе до онога што сада називамо памћењем простор-времена.

Да ствар постане интригантнија ту је и теорија релативности чије опште Ајнштајнове једначине можемо формално једнако добити узимајући по четири од шест координата простор-времена васионе. Три димензије су тада „просторне“, а четврта „временска“ – чију координату множимо још и имагинарном јединицом. Такав модел са променљивима изведеним из три Паулијеве матрице другог реда (корени јединичне) и три кватерниона (корени минус јединичне) већ имамо. А то је трећи начин за закључак о простору који памти.

На питање како „теорија информације“ објашњава појаву вишка информације настајањем историје честица наизглед из ничега, с обзиром на закон одржања, могућ одговор је у успоравању времена. Јединице времена данашње садашњости у односу на јучерашњу све су дуже, јер је све мање догађаја, а њих је мање јер је све мање супстанце у односу на простор. Све је мање информације супстанце, јер ентропија супстанце спонтано расте, а са растом ентропије опада информација. Не бих детаље овога сада понављао.

Све даље од нас галаксије у просеку удаљавају се све брже, до оних са руба видљивог свемира које би требале бежати брзином светлости. Али постепено превазилажење те брзине немогуће је, па ћемо стално виђати низ све даљих галаксија и наизглед опадање

густине свемира. У односу на прошлост, успорава нам се време, смањују јединице дужина и расту релативне масе. Садашњост се понаша као да улази у неко све јаче гравитационо поље. То опет повезује горња три тумачења.

О ефектима спуштања тела у (стварну) јачу гравитацију, релативно у односу на удаљеног посматрача, говоре исте Ајнштајнове једначине поља. Оне се пишу у 4-Д координатама простор-времена и односе се једнако на далека места као и на далеку прошлост. Међутим, за време t, растојање по четвртој координати је ct, где је c брзина светлости у вакууму, а квадрат тог „растојања“ огроман је број, па су гравитациони утицаји кроз „историју“ занемарљиви у односу на оне унутар садашњости.

Теорија информације сугерише нам (да је и) како је информација дводимензионална. Као када долази из далеке садашњости, она преноси силу из прошлости на сферама *виртуелних бозона* чије површине расту са квадратом полупречника сфере, а са том површином опадају амплитуде и вероватноће преноса, односно шансе интеракције са датим догађајем садашњости. Отуда опадање силе са квадратом „удаљености“, али значајно брже временске него просторне. При томе треба разликовати деловање гравитационих виртуелних сфера које се шире у више димензија од рецимо електромагнетних, због којих је поље првих слабије.

Значајније опадање информације преносом кроз историју него кроз садашњост може се тумачити и губицима шумом канала. Нека то буде следећа тема, уз само напомену овде да различита тумачења исте стварности математици нису страна. Познато нам је да постоји више од 620 битно различитих доказа Питагорине теореме и да то не значи да методе, или области из којих ти докази долазе стоје у противречности.

Непрестани раст „Девичанске супергрупе“
`http://izvor.ba/`
24. јула 2020.

1.26 Шум канала

Важно практично питање информатике које се поставља приликом дизајнирања или коришћења система за пренос или обраду података јесте који је капацитет датог система, односно колико информације он може пренети у датом времену?

Шенонова теорема (1948) каже да је *капацитет канала* (енг. channel capacity) $C = B\log(1 + S/N)$, у битима када је логаритам базе два. Ово B (band) јесте опсег фреквенција за пренос сигнала у херцима, S (signal) и N (noise) јесу просечна снага сигнала и адитивни бели нормални (Гаусов) *шум*, бука у ватима. Однос сигнала и буке обично се даје у децибелима. Капацитет је највећа горња граница преноса.

На пример, типична телефонска линија са односом сигнала и буке $S/N = 30$ dB и опсегом $B = 3$ kHz има (максимални) капацитет мало мањи од $C = 30$ kbps (килобита у секунди). Сателитски ТВ канал са односом сигнала и буке 20 dB и опсегом 10 MHz има капацитет 66 Mbps (мегабита у секунди).

Количник капацитета и опсега који нас подсећа на количник тежине и запремине због чега га можемо називати специфичном тежином информације преноса, заправо је сличнији количнику топлоте и температуре и тиме *ентропији*. Већем порасту ентропије термодинамичког система одговара већи губитак информације, тако да C/B можемо сматрати „губитком“ информације одашиљача.

Ентропија у експоненту, $\exp(C/B)$, је број неких једнако вероватних опција. Када од тог броја одузмемо јединицу добијамо број могућности Бозе-Ајнштајнове расподеле,

$\exp(C/B) - 1 = S/N$. Реципрочна вредност броја могућности, N/S, вероватноћа је која описује статистичко понашање, овде бозона, једне од две врсте елементарних честица карактеристичних по томе што се на ниским температурама могу у неограниченом броју наћи у истом стању енергије, у појави која се назива *кондензација*. Из поменуте Шенонове једначине, дакле, налазимо да однос шума и сигнала одговара Бозе-Ајнштајновој расподели.

Описао сам једноставан рачун који би се могао појављивати и у уџбеницима физике (не још увек), али оно што следи дубље је. Добили смо да је шум пропорционалан вероватноћи бозона. Отуда први закључак да мању неизвесност места има већа вероватноћа (налажења) бозона. Због мање информације она су зато привлачнија. Други закључак биће да на тим местима време протиче спорије.

Оба ова извода припадају „теорији информације“. Први долази из њеног начелног минимализма, а други из схватања да садашњост, дакле време, настаје реализацијом случајних догађаја. Први зато што природне појаве беже од информација, а други зато што се природне појаве састоје само од информација. Сада налазимо како се бозонима трасира вероватноћа простора.

Прилику за проверавање нових ставова имамо са општим једначинама релативности. То су Ајнштајнове једнакости тензора 4-Д геометрије простор-времена и енергије. Иницијално те енергије даје маса, коначно необавезна, коју сматрамо узроком гравитационог поља. Оно што се сада испоставља важним јесу количине бозона које простор чини вероватнијим а време споријим. Већа концентрација бозона даје гушће поље, кажемо јачу гравитациону силу (спорији ток времена гравитационо је привлачан).

У том смислу слагање Шенонове теореме о шуму канала са Ајнштајновим једначинама постаје неочекивано једноставно и добро када приметимо да информација може бити потенцијална (као шест могућности пре бацања коцке) и актуелна (један једини исход након). Бозони уопште аналогни су потенцијалним информацијама, али они сами могу се делити на виртуелне и реалне, опет на (нове врсте) потенцијалних и актуелних. Примери таквих су фотони (електромагнетно зрачење) којима комуницирају електрони (в. Фајнманове дијаграме).

Другачије примере у вези са горњим ставовима наћи ћемо у савременој *космологији*. Свемир се шири тако да све даље галаксије одлазе од нас (у просеку) све брже. Оне убрзавају ка рубу видљиве васионе, ка *хоризонту догађаја* свемира, најдаљој сфери од нас унутар које се налази све што можемо видети, а која од нас бежи брзином светлости. Тај је процес диригован топљењем супстанце у простор, док се садашњост развлачи и разређује стално нестајући у све дебљим талозима прошлости.

Иако се галаксије убрзавају од нас оне остају видљиве, јер не достижу брзину светлости. Сав тај процес личи на посматрање са сигурне удаљености неког тела које пада у црну рупу. Оно не нарушава законе физике (рецимо одржања енергије, импулса, информације), али му релативна маса расте, јединице дужине се скраћују у правцу центра гравитације, време успорава ка заустављању.

Колико год то тело гледали оно не стиже до хоризонта догађаја црне рупе, сфере која је окружује и, што се нас тиче, на којој време стоји. Тело се постепено навлачи око сфере попут плашта остајући само дводимензионална информација.

Са становишта онога који пропада, пре него што достигне хоризонт догађаја црне рупе, време нас из вањског света изгледа му све брже а радијалне удаљености веће. Ми за тело које пропада у црну рупу постајемо све више убрзане појаве, као што галаксије изгледају нама.

C = B log(1 + S/N)
http://izvor.ba/
31. јула 2020.

1.27 Гравитон

Класична физика познаје четири основне силе у природи – јаку и слабу нуклеарну, електромагнетну и гравитациону.

За сваку од њих постоје посебне честице које су носиоци поља силе. Оне су *бозони*, једна од две врсте елементарних честица карактеристичних по целобројном спину (унутрашњем импулсу), за разлику од друге врсте са половичним спином на које те силе делују и које се називају фермиони. Хигсово поље и по њему назван бозон признати су недавно (Церн, 2012).

Носиоци гравитационе силе су *гравитони*, електромагнетне фотони (електромагнетни таласи и светлост), слабе силе – две врсте W (енг. Weak) бозона са супротним електричним набојима и неутралним Z бозонима (енг. Zero electric charge), те осам врста глуона посредника јаке интеракције кваркова. За разлику од фотона и глуона, бозони слабе силе имају масу.

Постојање глуона експериментално је потврђивано од 1979. године у Хамбургу у Немачкој, а бозона W и Z годину дана пре тога када је обједињена слаба и електромагнетна интеракција. За фотоне знамо одавно, а гравитони до данас нису издвојени у лабораторији.

Електромагнетна сила између електрона и протона у атому водоника је 10^{39} пута већа од гравитационе између њих. Тај незамисливо велики декадни број писан са 39 нула иза јединице сматра се разлогом тежине доказа гравитона експериментом. Упркос томе, из познатих једначина гравитације ми са великом извесношћу познајемо гравитоне. Они путују брзином светлости и немају масу, или су близу томе.

Квантна физика разликује виртуелне од реалних бозона. Додатак моје теорије био би да се виртуелни фотони шире у облику концентричних сфера око електричног набоја (електрона), а не линеарно, пре свега зато што су они носиоци дводимензионалне информације, а онда и због површине сфере која расте са квадратом полупречника са којим опадају њена амплитуда и вероватноћа интеракције, те Кулонова сила. При томе таласна дужина виртуелне сфере не мења се као и евентуално испоручени импулс. Реални фотони путују у равнима поларизације.

Основна је претпоставка да аналогно важи за гравитоне. Фотон мора имати нулту масу мировања управо због квадратног опадања силе, које је веома прецизно проверено (Williams, Faller, Hill: Experimental Test of Coulomb's Law, 1971), због чега се мора кретати брзином светлости. То је онда особина и гравитона слабе гравитације (Сунца), а нека остане отворено питање до када су они виртуелни. Спин фотона је (плус-минус) један, гравитона је два.

Компликовано је објаснити зашто спин гравитона мора бити баш два. Укратко, то долази из метрике, симетричног 2-тензора гравитационог поља који је коваријантан, локалан и тангентно на тачку простора Минковског представља Поенкарову групу. Одатле маса 0 и хелицитет 2. Детаље о томе нађите, на пример, у прилогу: Phys.Rev. 138 (1965), B988-B1002.

Обзиром на закон одржања укупног спина, посебно гравитона 2 и електрона $\frac{1}{2}$ и да су оне елементарне честице, намеће се необично запажање да такве две не интерагују

непосредно. Ако уопште размењује спин, гравитон делује тек на мноштво честица као на водени талас, на посебан ентитет у окомитом кретању воде на вертикално кретање њених молекула.

Као на додатну информацију детета на љуљашци у парку, на синергију простог збира информација детета, љуљашке и парка, гравитација делује на апстраховане вишкове из честица материје. У том смислу гравитони су суптилнији комуникатори од фотона и њихов број (унутар видљиве васионе) могао би бити сразмеран укупној информацији тих њених делова. Такав резултат у бити не би био различит од једног недавно добијеног (Ioannis Haranas i Gkigkitzis , 2014) израчунавањем информације према холографском принципу.

За разлику од електромагнетних поља за које важи закон одржања енергије, из гравитације енергија негде цури. Први је то јавно изрекао совјетски физичар Лав Ландау, а и Ајнштајну је изгледа било познато, јер паралелним померањем (транслацијом) вектора по затвореној линији закривљеног простора почетна и завршна позиција вектора имаће различите правце, што указује на присуство (гравитационе) силе и промену импулса, енергије а сада и информације.

У „теорији информације“ гравитационо поље 3+1 смештамо у 3+3 димензионално простор-време, па поменути „одлазак“ енергије добија физички смисао. Гравитација је зато много слабија од електромагнетизма, јер се расипа на додатне димензије простор-времена. Теорија струна такође предвиђа додатне димензије, али као микроскопске обиме цилиндричних нити видљивог простора, док овде говоримо о већим ширинама времена.

За разлику од простора нити, према теорији струна, чије дебљине не видимо јер су мале, у „теорији информације“ додатне димензије времена су велике, али опет их не видимо јер нам фотони (којима гледамо) не долазе отуда. Када бисмо гледали гравитонима уместо фотонима, видели бисмо и те димензије?

Информација гравитона такође је дводимензионална и шири се на површинама сфера, али у више димензија од виртуелних фотона. Као једнодимензионалне велике кружнице на површини сфере којих треба много да покрију целу сферу, ове дводимензионалне сфере покривају само парчиће 6-Д просторвремена, а тај дефицит покривања говори о слабијој снази гравитације у односу на Кулонову силу.

Смисао одласка енергије
`http://izvor.ba/`
7. avgusta 2020.

1.28 Ауторитет

Ауторитет је право давања наредби, доношења одлука и изнуде послушности, то је и особа или организација која има политичку или административну моћ и контролу.

Формално, у перцепцијама јединке ауторитет се појављује као низ (вредности) ограничења на одговарајуће могућности обзиром на њене способности манипулације.

Сваком догађају који субјекту ствара неку ситуацију, проблем, придружујемо неке вредности личне способности и објективних ограничења. Уређен низ способности назовимо *интелигенцијом* субјекта, а одговарајући низ ограничења *хијерархијом* околине. Производ поједине способности са припадним ограничењем јесте *слобода*. Збир слобо-

да је „информација перцепције“. Општијим третирањем ови појмови добијају шире примене.

Када је збир слобода интерпретација скаларног производа вектора (низова) интелигенције и хијерархије добијамо на конзистентности. Упоређен са *Ремзијевом*[35] теоремом, која каже да нема апсолутног нереда (у низу насумичних речи кад-тад појавиће се смислена реченица, на небу облака појавиће се унапред замишљени лик), овај производ казује да не постоји нулта хијерархија. Са раније претпостављеном објективношћу неких случајности „теорије информације“ даље следи да сваки субјект има неку ненулту количину опција.

У условима (приближно) константне информације перцепције, привремено ограничавање вањских перцепција резултираће повећањем унутрашњих (ефекат монаха), а ограничавање унутрашњих већим вањским (ослушкивање), док ће трајно стање дефицита „хијерархије“ подстаћи пораст „интелигенције“, а суфицит првог опадање другог. Примери су и (можда незнатно) већа интелигенција старијег брата или когнитивно заостајање деце уз одрастање поред интелигентних помагала.

Већа информација перцепције значи већу *животност*, јаче супротстављање тежим препрекама, попут одважног прелажења реке Рубикон од стране Цезара упркос забрани Сената, а мања склоност препуштања судбини као кладиђа пуштеног низ воду. Уз већу информацију (дејство) иде већа агресивност, а са мањом пасивност; најмању имају проста физичка тела за које важи принцип најмањег дејства.

Субјект је утолико способнији да реши ситуацију уколико препреку учини мањом, али то мало утиче на промену његове укупне слободе. У крајњем случају, *неограничена способност* ишла би са одсуством забрана и не би припадала „универзуму информација“, таквом субјекту ништа не би било непознато.

Информација перцепције је инертна величина, као да је сама себи непријатељ. Са мањком недовољно смо информисани, а са вишком постајемо дезинформисани. Њени оптимуми споро се мењају, па смо у стању безнађа склонији измишљању фантомских опажања и приклањању ауторитету, а у условима самопоуздања други ће нам теже подваљивати. Учесници који су неуспешно решавали задатке лакше ће виђати ликове којих нема, тражиће утеху којекуда, за разлику од оних враћеног самопоуздања. Зато је религија јача међу сиромашним и обесправљеним, а њен утицај слаби са растом ауторитета правне државе.

Важно својство наводног производа низова је Шварцова неједнакост: тај интензитет мањи је или једнак производу „интензитета“ појединих низова. Ове интензитете теорија вектора дефинише доследно и веома универзално за различите примене (познаваоцима алгебре). Они су пресудни у квантној физици. Рецимо само да скаларни производ има вредности вероватноће (број од нула до један), ако су вектори које множимо расподеле вероватноћа (вредности вероватноћа исхода комплетног скупа одвојених исхода).

На пример, нека имамо два фалш новчића са вероватноћама падања писма и главе 0,4 и 0,6, односно 0,3 и 0,7, са скаларним производом $0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,7 = 0,54$. Тај производ је већи када су оба низа растући, што значи бољу „усклађеност“ два вектора, више геометријски речено – њихову већу паралелност. То нас наводи на претпоставку да се у квантној механици усклађена стања (честице, репрезентације вектора) лакше удружују, јер чине вероватније догађаје.

Отуда би се електрон спуштао на нижу љуску атома ослобађајући енергију (фотон) зато што атом и електрон чине вероватнију спрегу. Они имају већу вредност скаларног

[35] Frank Ramsey (1903-1930), британски математичар.

производа својих суперпозиција. На познато запажање физике да ће електрон изаћи из атома уз додатак енергије, сада надовезујемо да његово мање дејство (производа енергије и времена) унутар атома долази од мањка информације.

Принцип минимализма информације је на делу сваки пут када радимо са физичким потенцијалима, јер информација одговара дејству. Међутим, информација је појам шири од четири основне силе физике и исти механизам налазимо, на пример, у удруживању људи у групе, или у привржености субјекта ауторитету. Ауторитет је тада вектор (околина) са којим би дати вектор (субјект) био боље усклађен. Поређења ради, у случају неодређености импулса и положаја честице ауторитет је положај.

Није погрешно рећи да је ауторитет нешто попут хране, воде или ваздуха људима, лош и у мањку и у вишку. Видљиво је да деца воле добронамеран ауторитет и да поред таквога, рецимо, опада вршњачко насиље, као и злочин унутар дисциплиноване војске упркос поседовања оружја. У том тумачењу, размажена као и напуштена деца показују знаке одрастања уз мањак ауторитета.

Једнакост генерише сукобе на начин да такмичења спортиста у фер условима постају жешћа, па и прокламовање појединих врста једнакости (верника, каста, радника, тржишних услова) подстиче настанак диктатура инквизиције, Наполеона, комунистичких лидера, или олигархија либерализма. Познато је да расподеле једнаких вероватноћа имају максималну Шенонову информацију, а томе сада додајемо само да то води тежњи природе ка „ауторитетима“.

Хијерархија, слобода и ауторитет
`http://izvor.ba/`
14. avgusta 2020.

1.29 Прекретница

Нагињемо сандук да га преврнемо до неког угла након чега се он преврће сам. *Тачка преокрета* је прелазак тежишта сандука (пресек великих дијагонала) преко вертикале над осом обртања – доњом ивицом стране на коју сандук пада.

Знамо да ће се пре превалити пуна чаша од празне, она чијем тежишту треба мањи пут до прекретнице. Неповратну тачку имају и сплав на реци који се приближава водопаду, окидач на пушци пре испаљења метка, различито подешени хронометри причвршћени на дасци која се може слободно кретати по хоризонталној подлози спонтано ће се усклађивати и на крају синхронизовати.

Неповратно стање је понекад и „покрет крила лептира у Мексику који ће изазвати олују у Тексасу“. Цитирам „ефекат лептира“ теорије детерминистичког хаоса чији је оснивач амерички математичар *Лоренз* (Edward Norton Lorenz, 1917-2008) и који је рекао да је стање хаоса када садашњост одређује будућност, али приближна садашњост не одређује приближну будућност.

Новинар Малколм *Гледвел* је написао занимљиву књигу „Тачка преокрета“ (Malcolm Gladwell, The Tipping Point, 2000) у којој је тражио критичан моменат, окидач или тачку кључања, како он каже, која покреће *друштвену епидемију.* Описао је познати догађај америчке историје 18. маја 1775. године, када су Пол Ревер и Вилијам Довс одлучили пренети гласине о могућем нападу Енглеза мештанима околине Бостона кренувши на супротне стране.

Први је у преношењу вести био веома успешан и напад Британаца 19. маја на Лексингтон наишао је на организован и жесток отпор и доживео тежак пораз. Други

узбуњивач није успео. Анализирајући овај догађај аутор истиче три важне карактеристике особе која покреће „епидемију“ усмене предаје.

Повезником он назива изузетног појединца који је негде око нас и можда га нисмо свесни, али који има велики број познаника. Захваљујући таквима поруке (слободном) мрежом између два места стижу у пет до шест примопредаја. Повезници су људи који познају све и свакога. У теорији таквих мрежа, додајем, они су малобројни чворови, концентратори, са много конекција, наспрам осталих многобројних чворова са мало њих.

Другу важну карактеристику, сматра аутор, има зналац (енг. maven). Тако он назива необичну особу која у датим околностима прикупља битна знања и има податке о различитим потребним стварима, воли о томе да расправља и да буде људима на услузи. Трећу пресудну особину имају особе које Гледвел назива трговцима. То су људи са посебним способностима да нас увере у нешто када смо неодлучни и неповерљиви. Ситуација која у особи уједињује поменуте особине (повезника, зналца и трговца) може је учинити покретачем „друштвене епидемије“.

Свака од три особине је нека слика *слободних мрежа*, формално гледајући, названа по слободним, равноправним конекцијама својих чворова. Објашњавао сам како једнакост вероватноћа повезивања у изградњи ових мрежа доводи до издвајања ретких концентратора, попут људи који на слободном тржишту стичу несразмерно велика богатства, или владара који се у условима равноправности издвајају са већом моћи. Њихова појава последица је закона вероватноће, или принципа (минимализма) информације, а ако хоћете и природе која не воли једнакост, јер је њена суштина различитост, јединственост појединца.

У том моделу, када једнакост ствара неједнакост издвајајући концентраторе, може се наслутити потреба за равноправношћу да би се постигла јединственост. Дубље гледајући то је генератор који из формално једнаких законитости производи јединствене пахуље снега, листове дрвећа, особе. Отуда тражећи даље наћи ћемо и апстрактну универзалност математике.

Међутим, не идемо овде тако далеко. Једнако је фантастична акумулација дејства (информације) која под благом принудом принципа минимализма ствара вишкове и живот. И са тиме ћу заокружити ову причу. Да нисмо сведоци ерупција гејзира и вулкана на планетама притиснутима такође благом и универзалном принудом гравитације, тешко бисмо поверовали да свеприсутна тежња за мање може произвести више.

Када приметимо да начелни минимализам информације подржава издвајање живог бића из неживог, створења са већим могућностима бирања у условима тежње за што мањим, онда до налаза једног важног примера поменутог дуализма једнакости и јединствености нисмо далеко. Живо биће пролази кроз сличне фазе младости, зрелости и старости кроз које пролази олуја настала и вођена „принципом најмањег дејства“, познате свеприсутне „силе“ физике.

Аналогне фазе пролази и нарочито удружење живих бића, које исто можемо назвати живим. У раној фази јединке таквог друштва су једнообразне (стем ћелије) које се временом специјализују за различите послове у служби хијерархије. Оне на тај начин предају сопствене вишкове „могућности бирања“ (информације) организацији, поред тога настојећи да еволуирају у све ефикасније жртвујући дужину живота, памет или репродуктивност.

Тежња ка смањивању информације постоји и у демонизму, обожавању смрти, као и у жељи за редом и сигурности. Друге емоције само се шверцују, каче за овај фундаментални процес принципа информације користећи га, као што хидроцентралама ми искор-

иштавамо гравитациону силу да бисмо добили електричну енергију.

Обоје, живот и смрт, настају у „тачкама преокрета“ и као што жена не може бити половично трудна, тако се мртви не враћају у живе. Укратко, ово би био увод у један занимљив заплет.

Тачка преокрета и неповратно стање
http://izvor.ba/
28. avgusta 2020.

1.30 Одложена гравитација

Када дефинишемо информацију као количину опција и као неизбежан део било којег физичког феномена, добијамо занимљиву теорију информације. У њој ће се тамна материја и тамна енергија, које космологија данас препознаје у „грешкама“ ротације галаксија и у њиховом необјашњивом све бржем дистанцирању, лако објаснити готово секундарно и као да су за науку незанимљиве појаве.

1.30.1 Комуникација

Простор, време и материја састоје се само од информација. То је полазиште моје *теорије информације*. Њега прате закони очувања информације [3], шкртарење њоме, односно њен минимализам [2] и дејство – описиване у књигама наведеним на крају и у овој.

Укратко, информација је количина података која траје – иначе не бисмо имали експерименталне доказе. Иако се све у природи састоји од информација, природа економише са њима. Зато нам је лакше кодирати него декодирати, лакше се шире лажи од истине. Тела се привлаче тежећи вероватнијем стању, стању мање информативном. Информација је сва у количини несигурности и зато се њене почетне вредности троше чим се објаве. Размењују се интеракцијом, јер је интеракција (такође) комуникација.

Субјекти (честице) стога комуницирају јер немају све, а не могу имати све јер тада не би били објекти *универзума информација*. Због тога се простор непрестано мења, а његове промене су у „ширини“ и „дебљини“. Прилика за промену простора представља кретање елементарне честице чије трајање формира сопствену биографију објекта који не расте, већ оставља своју историју у простор кроз који пролази.

Растућа дебљина простора садржи сећања на супстанцу која се некада кретала кроз њега, али сећања простора такође су информације и радње за садашњост. Повећавање утицаја прошлости тачно је једнако смањењу информација садашњости, друго у складу са принципом минимализма (штедљивост природе са информацијама) и законом очувања. Ширине свемира очигледно расту испред телескопа астронома, али остале појаве везане за те (ширине и дебљине) тешка су искушења космолозима, једна као тамна енергија, а други као тамна материја.

1.30.2 Ентропија

Ентропија (S) у Болцмановом смислу (1872) је логаритам највероватније, у датим условима, могуће дистрибуције гаса. Лако је доказати да је то уједначена дистрибуција молекула, таква да су растојања између њих приближно једнака, према формули

$$S = k_B \ln W, \tag{1.1}$$

где је $k_B = 1,38065 \times 10^{-23}$ J/K Болцманова константа, а W број стварних микростања који одговарају макростању гаса. Укратко, Болцманнова формула показује однос између ентропије и броја начина на који могу бити уређени атоми или молекули термодинамичког система.

Стога је пораст ентропије еквивалентан смањењу информације (Шенон, 1948), сада рецимо за износ за који униформно распоређена маса постаје безлична, аморфна, попут војника на паради. Спонтани раст ентропије последица је принципијелне штедње природе са информацијама, а *генералисана ентропија* односила би се на сваки спонтани губитак информације.

„Генералисана ентропија“ се своди на супстанцу ван самог простора. Са таквом, додатном интерпретацијом спонтани раст ентропије васионе постаје „топљење“ физичке твари и повећање простора. Укупне информације о простору, времену и материји остају непромењене јер се прошлост повећава – смањење информације садашњости компензирано је дотоком из све веће прошлости.

Укратко, простор се шири, ентропија материје се повећава, његова укупна информација се смањује јер се депонује у прошлост, у (све већи) простор одакле делује на садашњост у износу тачно једнаком губитку информација садашњости.

1.30.3 Димензије

Због претпостављене објективне непредвидиве природе опција којима дефинишемо информације, у „информационом универзуму“ има нереализованих. Таква сложена „садашњост“ постаје Еверетових (1957) *много светова* квантне механике за чије чување историје су потребне три координатне осе времена, обзиром на три координатне осе простора и могућност постојања несигурности дуж сваке од њих.

Пронашао сам различите доказе шест-димензионалног простор-времена у оквиру теорије информације. Уз три познате просторне димензије (дужина, ширина и висина) иду три временске, или утолико већи број „временских“ димензија иде са више „просторних“ снабдевеним случајностима. Можете их пронаћи и у поменутим књигама[36], или у мојим претходним текстовима, тако да прескачем тај део. Приметите да овде радимо са додатним временским димензијама, за разлику од, рецимо, *теорије струна* где се говори само о додатним димензијама простора.

Део који не бисте требали прескочити је матрична једначина $\hat{\sigma}^2 = \hat{I}$ чији су корени *Паулијеве матрице*[37] $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ и $\hat{\sigma}_z$, редом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

или $\hat{q}^2 = -\hat{I}$, чији су корени *кватернионi* $\hat{q}_x$, $\hat{q}_y$ и $\hat{q}_z$, редом:

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Три матрице $\hat{\sigma}$ и три матрице $\hat{q}$, овде другог реда, могу представљати скаларе у векторском простору, јер множење скалара не мора бити комутативно.

Наиме, *векторски простор* на телу Φ назива се адитивна комутативна група X елемената x у којој је множење са елементима из Φ дефинисано тако да за сваки пар $x \in X$ и $\lambda \in \Phi$ постоји $\lambda x \in X$. Притом, за све $\alpha, \beta \in \Phi$ и $x, y \in X$ важи:

[36] на пример, 1.13 Простор и време, [2]

[37] в. 2.4.6 Поопштавање

1. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$,
2. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$,
3. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
4. $1 \cdot x = x$.

Елементе векторског простора називамо *векторима*. Тело Φ над којим је векторски простор X назива се скаларно тело јер се његови елементи називају *скалари*.

Ово отвара могућност у *Клајн-Гордоновој једначини* да се изаберу још неких четири од шест координата, за 4-Д из 6-Д простора-времена. Клајн-Гордонова једначина са параметром масе m је

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \nabla^2\psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0, \tag{1.4}$$

где је приближно $c = 300\,000$ km/s брзина светлости, а $\hbar$ Планкова редукована константа. Комплексно вреднована функција $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ има просторне променљиве $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и временску променљиву t, а Лапласијан $\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ делује само на променљиве простора. Супституцијом $x_4 = ict$, са $i^2 = -1$ и $\mu = mc/\hbar$, једначина (1.4) постаје

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 + \partial_4^2 - \mu^2)\psi = 0, \tag{1.5}$$

у природним јединицама.

Ајнштајнове једначине опште релативности такође имају ову симетрију просторних и временских координата, што је лако проверити. Због разумевања времена као организације прошлих догађаја, за ову симетрију ћемо додати одговарајуће разумевање простора. Откривамо и да се ефекат гравитације протеже кроз свих шест димензија простор-времена, при чему временска координата садржи веома велики број (брзину светлости) чији је квадрат незамисливо велик број, па је деловање гравитације кроз прошлост пригушено у односу на деловање кроз садашњост.

Гравитација закривљује простор-време чинећи да енергија и информације цуре из гравитационог поља[38]. Због тога се гравитационо дејство протеже у 6-Д простор-време, за разлику од електромагнетног које је ограничено на наш реални 4-Д свет. У складу с тим, када бисмо „гледали“ гравитонима уместо фотонима „видели“ бисмо и могуће опције, а не само реализоване. Последица овог ширења гравитације на свих шест димензија простор-времена јесте и његова слабија сила у односу на Кулонову.

1.30.4 Други ефекти

Због гравитационог дејства на садашњост, наслаге прошлости чине временом све стабилнији референтни систем. Примећујемо то код просипања воде која се ротира са лавором, ефекта који је Њутн (1687) сматрао доказом постојања „апсолутног мировања“, односно „апсолутног простора“, а који је Ајнштајн касније назвао Маховим принципом (зависност дате масе о целини масе свемира).

Нешто другачији доказ гравитационе активности прошлости у садашњости је кретање Меркуровог перихела у смеру ротације око Сунца. За разлику од Њутнове теорије гравитације, Ајнштајнова предвиђа кретање Меркура око Сунца не линијом статичне елипсе, већ по једној која се полако окреће са планетом око Сунца. Као што из опште

[38] в. 1.13 Простор и време у књизи [2], или 1.27 Гравитон овде

релативности знамо, угао померања перихела α, изражен у радијанима по револуцији (обрту планете око Сунца), приближно даје формула

$$\alpha = \frac{24\pi^3 L^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}, \tag{1.6}$$

где је L споредна оса елипсе, T је период револуције, c је брзина светлости, а e је ексцентрицитет елипсе. Због утицаја гравитације из прошлости, такође очекујемо да се угао промене перихела смањује са квадратом „временске удаљености“, $X_4 = iTc$, тако да се ова потврда опште релативности може сматрати и као потврда о њеном додатку овде изнетом.

Утицај *тамне материје* (енг. dark matter) на ротацију галаксија могао би бити још један доказ, на пример, ако се испостави да она прати кретање маса.

Објашњење *тамне енергије* (енг. dark energy) овде представљеном теоријом је мало сложеније. Простор садашњости постаје „гушћи“ не само због све веће величине изазване „топљењем“ супстанце, већ и због растућих „наслага“ у прошлости. Садашњост, „посматрана“ из неког фиксног тренутка своје прошлости, понашала би се као тело које пада у гравитационо поље.

Релативно време би текло спорије, а радијалне дужине би постајале краће. Релативна маса и енергија тела садашњости повећавале би се тако да и релативни и сопствени закон одржања остаје на снази.

Међутим, посматрано из садашњости, кретања у прошлости била би бржа. Релативни убрзани ток времена галаксија које примећујемо све даље и даље у прошлости због удаљености од Земље надокнађује се релативним успоравањем услед њиховог кретања. Ово такође важи за масу, енергију, као и за дужину. Слично видимо у кретању сателита око Земље, где време тече брже због надморске висине, али спорије због брзине. Ове две вредности не морају се сасвим поништити.

Коначно, приметите да путовањем кроз свемир није могуће доћи до његовог руба, *хоризонта догађаја* васионе, јер се због повећања простора садашњости он одмиче недостижном брзином светлости. Аналогно томе, није могуће вратити се на почетак, на *велики прасак* (енг. big bang), јер би нам у замишљеном путовању кроз прошлост требало све више и више времена до бесконачности, па у овој теорији, у том смислу, заправо и не постоји почетак стварања универзума.

1.30.5 Епилог

Из овог кратког чланка можете видети колико је необична „теорија информације“ на којој радим. То је разлог зашто не покушавам никога да убедим у њену евентуалну тачност, бар не док ни сам нисам сигуран у то. У сваком случају, био бих захвалан читаоцу који би открио и указао ми на недоследност овакве „теорије“, како се не бих даље замарао са свим тим.

Delayed Gravity
`https://www.academia.edu/43945696/`
August 25, 2020.

1.31 Околина

Да је информација и ствар перцепција видимо у разликама опажања сопственог и релативног посматрача тела (система) у кретању или у начинима комуницирања

(интеракција) објеката, па и у релативизирању тежине проблема зависно од способности решаваоца.

Део *бесконачности* који примамо увек је коначан и зависан од субјекта на начин који отвара нова питања о дељивости информације. Свевременске истине конзумирамо у ограниченим порцијама на основу којих претпостављамо њихову једноличност и универзалност, а онда, због особина дејства информације, енергије целих истина су ништавне насупрот парчића које преузимамо. То на први поглед апсурдно гледиште теорије информације тема је ове приче.

Познату изреку да „оно што не можемо објаснити не разумемо“ (Ајштајнову), која сугерише и потребу истраживања нејасноћа, обрнимо и приметимо да са разумевањем бесконачности у рукама ми већ стојимо на прагу света физике са готовим објашњењима. Нечулне појаве корак по корак схватићемо као физичке и убудуће, слично прихваћеним атомима и квантима.

Није то нарочито неприхватљиво. Истине које се тичу дискретних, пребројиво бесконачних скупова математички су неспорне, штавише тачније су од физикалних, а интуиција је та која оклева и кочи нас. Она ће попустити и као што нам је у самом апстрактном исказу „2+2=4“ промакла бесконачност, наше животињско наслеђе временом сваће и будуће кораке.

Наиме, док израз „два плус два је четири“ апстрахујемо (издвајамо) из „две јабуке плус две јабуке су четири јабуке“, затим „две ноге плус две ноге су четири ноге“, па „два килограма гвожђа плус два килограма гвожђа су четири килограма гвожђа“ и даље сталним набрајањем конкретних, увиђамо да у коначно много корака није могуће доказати оно једно *апстрактно тврђење*. То је чудо математике у ткиву конкретне науке. Већ у самом једном једноставном и апстрактном изразу цела је бесконачност наше реалности.

Апстракције су важно ткиво физике, разумели ми то или не. Без *комплексног броја*, фантастичног и практичног, нема егзактне науке. Њихове бесконачности су толико уткане у „конкретно“ да више и не примећујемо обим математизовања самих појмова рецимо „реалног“ броја или линије; данас једва разумемо своју прастару свест. Нову праксу прихватамо несвесни нових спознаја.

Недалеко су и тачке *комплексне равни*. Одређују је две окомите праве линије, реална апсциса (хоризонтална оса бројева) и имагинарна ордината (вертикала), рекли бисмо још апстрактније од самих комлексних бројева – да није рецимо координације летова авиона на Хитроу у Лондону (или другом већем аеродрому). Елегантни, брзи и тачни начини означавања, усмеравања и праћења авиона тамо се изводе помоћу теорема комплексне равни.

У грађевинарству можемо радити са скромним знањем о геометријским равнима и веровати да бесконачности нема, али ако на том концепту покушамо направити *зграду геометрије* указаће се друга истина. Само зато што их не можемо јести, мирисати, шчепати рукама, или их уклопити у мистична објашњења света позната нам из давнина, комплексне бројеве (недавно су откривани) не сматрамо недостојнима. Доследно би свако будуће сазнање могло бити недостојно, јер оригиналности увек пркосе неким старим уверењима.

Поменутом збиру ($2 + 2 = 4$) једнако тачна су тврђења да природних $\{1, 2, 3, \dots\}$, целих $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ и рационалних бројева (разломака са целобројним називником и бројником) има једнако бесконачно много, а да ирационалних (реалних бројева који нису рационални) има више. Првих је пребројиво, кажемо дискретно много, а других непребројиво, континуум много.

Записи рационалних бројева су периодични, ирационалних нису. У децималама $x = 0,232323\ldots$ пар „23“ бесконачно се понавља, па је $100x = 23 + x$, а број $x = 23/99$ је рационалан. Сви периодично писани бројеви тако су рационални. Непериодични, какав је пи ($\pi = 3,14159\ldots$), ирационални су. Првих има *дискретно* а других *континуум много*. То су две бесконачности различите величине.

Непредвидивост следеће цифре подиже ред бесконачности слично као насумичност честица. Сва икада реализована стања свих елемената васионе дискретан су скуп, али њихове могућности чине континуум. Овај други надскуп је првом и толико пута је већи да шансе да у већем насумице изаберемо елеменат мањег нема, макар бирали пребројиво бесконачно много пута!

Ситнији смо од капи у мору могућности, али је наша реалност „свугде густа“. То је израз за скуп рационалних бројева (разломака) на бројној правој где је он такође *свугде густ*. У ма како малој околини (позитивне дужине) ма којег рационалног броја (тачке) те праве увек се нађе још неки такав број (поред многих ирационалних). Дакле, логички је могућ добро распоређен свет као скуп рационалних бројева, ни близу велик као континуум, али у њему „свугде густ“.

Коначна дељивост физичке информације чини простор-време догађаја 4-Д света дискретним, свугде густим у скупу могућности и иако мањи никада не излази из свог домена у остатак већег, без већег он не може постојати.

За интервал реалних бројева кажемо да је „затворен“ ако садржи рубне тачке, а „отворен“ ако их не садржи. Кугла је *затворена* или *отворена* према томе да ли садржи вањску сферу или не. Комплементаран отвореном је затворен скуп (ако тачка припада једном не припада другом) и посебно је сваки коначан скуп затворен. Највећи број скупова није ни отворен ни затворен, а празан и читав простор једини су истовремено и отворени и затворени скупови.

Физичке информације су дискретни скупови и стога затворени, па нас математика и у овом случају учи да не постоји празна *празнина*, нити *универзум* који садржи све. Вакуум и целу васиону (и само њих) морамо третирати истовремено и као реалне и као псеудо-реалне информације! Пресек ма које колекције затворених скупова и унија коначно много таквих затворени су скупови, што нас враћа претходном – да реалној информацији из њеног света нема излаза.

Две ноге плус две ноге су четири ноге
`http://izvor.ba/`
4. септембра 2020.

1.32 Адхеренција

Када имамо идеју о нечему онда постоји информација о томе, а са информацијом иде и неизвесност. Прво следи из претпоставке да живимо у *универзуму информација*, а друго да са сазнавањем добијамо нешто непознато. Апстрактне представе са таквим (хипо)тезама и буквално постају предмет „теорије информације“.

Математика бројева која не циља на количине одавно се развија у функционалној анализи, топологији и теорији скупова. Мрежа њихових ставова добар је модел за даља појашњења идеје неизвесности, а надовезаћемо је на запажање (претходне колумне) да празан и сав простор као скупове који су истовремено и отворени и затворени можемо сматрати вратима између *бесконачности* и *коначности*. Бесконачност „цури“ ка нама филтрирана законима физике, а зашто је такво тумачење неопходно видећемо.

Пре свега је речено да закони одржања (материје, енергије, импулса, информације) следе из коначности појава. Само бесконачност може бити свој прави део и стално се трошити а увек остати иста. Додатно, топологија нас учи да бесконачни скупови (поред затворених) могу бити једини отворени, па се стално одузимати и трајати употребљиви између осталог и зато што унија ма колико отворених скупова и пресек коначно много њих чине отворен скуп.

Сви њени модели за нас су скоро једнако добри и ако вам се математичка анализа чини тешком често је довољно замишљати само „интервале“ бројева, какав је на пример (1,2) у којем су реални бројеви већи од један, а мањи од два. Иста правила као заједничке аксиоме оба, модела и примене, дају и заједничке последице.

Тачка на бројној оси је „унутрашња“ неког интервала ако је интервал њена околина[39]. Колекција свих унутрашњих тачака датог скупа образује *унутрашњост* скупа. Очигледно је унутрашњост скупа његов подскуп, а унутрашњост скупа рационалних бројева је празан скуп. Зато дефинишемо „адхерентну“ тачку скупа у чијој свакој околини је бар једна тачка тог скупа. Колекција адхерентних тачака је *адхеренција*. Сваки скуп је подскуп своје адхеренције. Адхеренција отвореног интервала је затворени интервал, адхеренција скупа рационалних бројева (разломака) је скуп реалних бројева.

Унутрашње и адхерентне тачке скупова и њихових комплемената узајамно се искључују. Отуда потреба за дефиницијом тачке на *међи* (рубу, граници) која је истовремено адхерентна тачка и скупа и његовог комплемента. Међа сваког скупа је затворен скуп. Ово су тек први појмови анализе и топологије, иначе нетривијалних (напорних) области математике. Више пута је речено да такве полазе од ставова у које је тешко сумњати да бисмо дошли не само до места којима се нисмо надали, него и до оних у које није лако из прве поверовати. Зато не журимо.

Формализам математике је подлога, али и база и надградња су у универзуму информација. Оно у шта би претходно било „тешко поверовати“ постаје однос исхода случајних догађаја и свих могућности, веза реалности и паралелних реалности, или 4-Д и 6-Д простор-времена.

Највише пребројиво бесконачан (дискретан) скуп чине догађаји једне реалности која је садашњост (3-Д простора у датом тренутку), наша стварност свих честица васионе, али толике је величине и 4-Д простор-време развијано слој по слој пратећи једну садашњост. Са разним токовима времена слични догађаји (честице) доспевају у све могуће псеудо реалности.

Може се показати да постоји изоморфизам (обострано једнозначно пресликавање структура) између односа ових догађаја и односа рационалних са реалним бројевима. Адхеренција скупа рационалних је скуп реалних бројева. Универзум једне реалности је дискретан (као рационални бројеви) за разлику од континуума (величине реалних бројева) универзума свих могућности, а други (већи) је адхеренција првог (мањег). То је корисно знати за даљи рад.

Овде ћемо стати на запажању да је унија информација такође информација и да описано 6-Д простор-време такође садржи неизвесност. Оно је информација и стога поседује неизвесност и постоји у неизвесности. Другим речима 6-Д простор-време није крај приче. Познајући *Раселов парадокс* (нема скупа свих скупова) или *Геделове* теореме немогућности, нова нас интерпретација реалности не изненађује, она добија на значају. Међутим, она отвара нови поглед на физичко разумевање садашњости и

[39]Тачка $s \in S$ назива се унутрашњом тачком S ако постоји околина s комплетно садржана у S. Скуп свих унутрашњих тачака S назива се унутрашњост (енг. interior), ознаке $\mathrm{int}(S)$.

времена уопште.

Ову необичност модела 6-Д простор-времена сагледајмо заједно са замењивошћу три просторне и једне временске (ict – производа имагинарне јединице, брзине светлости и времена) координате неким другим избором четири од њих шест. Говорим опет о симетрији простора и времена која је непосредно проверљива у *Клајн-Гордоновој једначини* квантне механике али и у Ајнштајновој општој релативности, а специфичност је теорије информације.

Откривамо је и у непредвидљивости како времена тако и простора, видљивој из ограничене брзине кретања субјекта и дозе непознатог у кретању честица. Зато што ток времена овде дефинишемо количином случајних догађаја, а онда и због *Белове теореме* (1963), према којој не можемо надмудрити Хајзенбергове релације уводећи скривене параметре, потребно нам је мало више неизвесности од оне евентуално депоноване у неком статичном 6-Д базену догађаја.

Да би се избегла заобилажења „фантомског деловања на даљину“, неизвесности времена треба оснажити насумичним настајањем садашњости из бесконачности. Скуп могућих догађаја тада не би био попут неког контејнера фиксних опција из којег би искакали случајни исходи и не би било могуће „преварити“ релације неодређености нити оспорити Белову теорему.

Простор-време Еверетових *много светова* (1957) није више скуп датих тачака, односно просторно-временских догађаја, по којој се *садашњост* креће на случајан начин, него су могућности додатно замућене дотоком из бесконачности филтрираним законима физике.

Симетрија простора и времена
`http://izvor.ba/`
11. септембра 2020.

Glava 2

Формализам

Ово је трећа књига трилогије о свету информација. У одељку о формализму прве, Физичке информације [3], покушао сам да што је могуће мање мењам Шеноновy дефиницију да бих добио информацију за коју важи закон одржања, тачније речено да покажем да је такво формулисање могуће. Иницијални разлог било је убеђивање (неких) колега да је у реду то што се заузимам за „физичку информацију“, у смислу да за „информацију“ у стварности можда и важи нека врста закона одржања слична оном за енергију, импулс или спин, али да та прича „не пије воду“ што се тиче математичких формула.

У другој књизи, Минимализму информације [2], одељак о формализму посвећен је анализи бестежинског стања тела које слободно пада у гравитационом пољу да би читалац даље можда самостално направио корак ка генерализацији те ситуације у смислу „начела минимализма“ у расипању информације од стране природе. Физички систем у стању слободног пада, рецимо сателит у орбити око Земље, креће се по геодезијским линијама које су решења Ајнштајнових општих једначина.

Тамо је показано да су ти геодезици и решења Ојлер-Лагранжових једначина кретања по принципу најмањег дејства. Из истог принципа најмањег дејства такође су изведени Кристофелови симболи (неопходни за дефинисање тих једначина у тензорском облику), а коначно из њих су изведене и саме Ајнштајнове опште једначине. Тиме је идеја инерцијалног кретања и бестежинског стања сведена на принцип најмањег дејства.

Оно што је у тој књизи важније је надовезивање тог у физици познатог „принципа најмањег дејства“ на нов и непознат „принцип најмање комуникације“. Тело слободно пада тако да комуницира минимално. Оно тада има и највећу ентропију. Такође, креће се по (релативно) највероватнијој путањи. Како оно тада не осећа силу гравитације, не осећа нити „спонтано привлачење ентропије” ка центру гравитације. Другим речима, ако сматрамо да је спонтани раст ентропије узрок гравитационог привлачења, онда највеће сопствене ентропије имају тела на геодезицима.

У књизи која је пред вама, Дејству информације, поглавље о формализму отвара примену бесконачности у физици. Сетим ли се тешкоћа са „обичном“ (дискретном) бесконачности у математици у време откривања функционалне анализе (граничних вредности, деривација и интеграла), а затим и оних „необичних” (континуума и већих) бесконачности Канторове теорије скупова, не надам се лаком разумевању моје идеје да су и апстрактне математичке истине врсте информација, а још мањем о „цурењу информације“ из тог апстрактног света у физички конкретан. Зато је овде стидљив, једва приметан увод физичког дејства у бесконачности.

2.1 Векторски простор

За сабирање као и за множење реалних функција важе иста следећа два својства као и за сабирање односно множење бројева, операција „+“ или „·“ коју овде означавамо кружићем:

$$a \circ b = b \circ a \quad \text{(комутативност)} \tag{2.1}$$

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \text{(асоцијативност)} \tag{2.2}$$

Тако писану операцију „кружић“ лакше генерализујемо на бинарне операције између вектора, матрица, па и на композиције функција и слично. Тада је једноставније говорити о структури скупа $\mathcal{G}$ снабдевеној датом операцијом. Када се на горње две особине додају егзистенција „неутралног“ и „инверзног“ елемента:

$$(\exists e \in \mathcal{G})\ a \circ e = e \circ a \quad \text{(неутрални елеменат)} \tag{2.3}$$

$$(\forall a \in \mathcal{G})(\exists a^{-1} \in \mathcal{G})\ a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e \quad \text{(инверзни елеменат)} \tag{2.4}$$

добијамо структуру комутативне или Абелове *групе*.

Када се каже само група мисли се на структуру са операцијом која није комутативна, без (2.1). Такво је на пример множење матрица или композиција функција. Лако налазимо да је тада

$$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}, \tag{2.5}$$

јер је, рецимо:

$$(a \circ b)^{-1} \circ (a \circ b) = (b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) = (b^{-1} \circ (a^{-1} \circ a)) \circ b = (b^{-1} \circ e) \circ b = b^{-1} \circ b = e.$$

Да група може имати само један јединични елеменат проверавамо овако:

$$e = e \circ e' = e',$$

где су e и e' претпостављена два јединична елемента.

Прстеном $\mathcal{R}$ називамо адитивну (са операцијом „+“) Абелову групу $\mathcal{G}$ с бар два различита елемента у којој је сваком уређеном пару елемената $a, b \in \mathcal{G}$ придружен један једини елеменат $a \cdot b \in \mathcal{G}$ који зовемо производом елемената a и b. При томе множење у $\mathcal{R}$ има следећа својства:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{(асоцијација)} \tag{2.6}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{(лева дистрибуција)} \tag{2.7}$$

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \quad \text{(десна дистрибуција)} \tag{2.8}$$

Прстен се зове комутативан ако је $a \cdot b = b \cdot a$ за сваки пар $a, b \in \mathcal{R}$.

Телом Φ називамо прстен са својством да скуп свих од нуле различитих елемената из Φ образује групу обзиром на множење. Јединични елеменат те групе означавамо са 1. Комутативно тело зове се *поље*[1]. Примери тела (поља) су рационални, реални и комплексни бројеви с уобичајеним сабирањем и множењем.

Векторским простором над телом Φ називамо адитивну комутативну групу $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ у којој је дефинисано множење са елементима из Φ, тако да је за сваки пар $x \in X$ и $\lambda \in \Phi$ дефинисано $\lambda x \in X$.

При томе, за све $\alpha, \beta \in \Phi$ и $x, y \in X$ вреди:

[1] Дефиниције узете из [15].

(i) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$,

(ii) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$,

(iii) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

(iv) $1 \cdot x = x$.

Елементе векторског простора називамо *векторима*. Тело Φ над којим је векторски простор X зовемо телом скалара јер његове елементе називамо *скаларима*.

Примери вектора су *орјентисане дужи*. Оне су једнаке када имају исти правац (паралелне су), орјентацију (смер) и дужину (интензитет), па класа једнаких има свог представника, орјентисану дуж са почетком у исходишту и врхом са датим низом координата. Збир орјентисаних дужи одређених страницама паралелограма из истог темена је дијагонала паралелограма из тог темена. Разлика тих вектора је друга дијагонала орјентисана ка вектору од којег се одузима.

Уређени *низови* који би могли представљати координате врхова орјентисаних дужи такође су пример вектора. Они се сабирају тако што се k-та ($k = 1, 2, \dots$) компонента сабира са k-том, па према томе, множе се скаларом λ тако што се свака компонента низа множи тим скаларом.

Квантна стања су вектори. Њихове компоненте углавном су комплексни бројеви и то такви да изражавају вероватноће обзервабли (мерљивих физичких величина). Називамо их суперпозицијама, али и расподелама вероватноћа обзервабли, што значи да квантна механика посматра само њихове представнике јединичне дужине.

2.2 Унитарни простор

Векторски простор X над телом скалара Φ (реалних или комплексних бројева) зовемо *унитарним* ако је сваком наведеном пару $x, y \in X$ придружен један и само један скалар $\langle x|y\rangle \in \Phi$ тако да вреди:

1. $\langle x_1 + x_2|y\rangle = \langle x_1|y\rangle + \langle x_2|y\rangle, \quad x_1, x_2, y \in X$;
2. $\langle \lambda x|y\rangle = \lambda\langle x|y\rangle, \quad x, y \in X,\ \lambda \in \Phi$;
3. $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle^*, \quad x, y \in X$;
4. $\langle x|x\rangle \geq 0, \quad x \in X$;
5. $\langle x|x\rangle = 0 \iff x = 0, \quad x \in X$;

Овако дефинисану функцију $\langle x|y\rangle$ називамо скаларни или унутрашњи производ вектора x и y. Реалан унитарни простор ($\Phi = \mathbb{R}$) често се зове Еуклидов векторски простор, тада је $x^* = x$. Комплексан унитаран простор ($\Phi = \mathbb{C}$) у употреби је у квантној механици; тада је $x^* \in \mathbb{C}$ коњуговано комплексан број од $x \in \mathbb{C}$.

Приметимо да из услова 1. и 2. следи

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2|y\rangle = \lambda_1\langle x_1|y\rangle + \lambda_2\langle x_2|y\rangle, \tag{2.9}$$

што значи да је скаларни производ линеарни *функционал*[2] по првом аргументу, а из услова 3. следи:

$$\langle x|\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\rangle = \langle \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2|x\rangle^* = (\lambda_1\langle y_1|x\rangle)^* + (\lambda_2\langle y_2|x\rangle)^* = \lambda_1^*\langle x|y_1\rangle + \lambda_2^*\langle x|y_2\rangle, \quad (2.10)$$

што значи да је скаларни производ антилинеаран функционал у другом аргументу.

Унитарни простор не мора бити коначне димензије. У унитарном простору се може, баш као и у еуклидским просторима, увести појам ортогоналности и ортонормираног система вектора, а у коначно-димензионалном случају може се доказати постојање ортонормиране базе.

2.2.1 Информација перцепције

Нека је Ω простор случајних догађаја и нека су $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in \Omega$ опити о којима нека *индивидуа* (живо или неживо биће) може имати *перцепције*. Претпостављамо да се сваком од опита ω_k, редом за $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, могу придружити две вредности: *способност* индивидуе $I_k = I(\omega_k)$ да се носи са опцијама k-тог опита, и *ограничења* $H_k = H(\omega_k)$ средине да јој то онемогући. За свако k производ $L_k = I_k H_k$ називамо неком *слободом* индивидуе у односу на опит ω_k, а збир слобода

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n, \quad (2.11)$$

је *информација перцепције* дате индивидуе.

У теорији информације о којој говорим сваки део материје је врста информације. Доследно томе, постоје и информације како сваке поједине слободе тако и способности односно ограничења. Отуда почетни називи за L либертас, I интелигенција, а H хијерархија, са ограничењем на жива бића, али је из општости саме теорије јасно да се информација перцепције односи и на нежива бића. Основна идеја била је да се већа интелигенција (способност) развија тако да тражи више слободе (опција, информације), а мање ограничења ($I = L/H$). Тако долазимо до информације перцепција формално као скаларног производа унитарних простора.

На пример, када у Хајзенберговим релацијама неодређености, неодређеност импулса Δp_x заменимо слободом, а неодређеност положаја Δx ограничењем, оба дуж апсцисе, онда је њихов производ, $\Delta p \Delta x \geq L_x$, слобода дате честице у односу на дати експеримент. Најмања вредност поменуте слободе L_x је квант дејства дате честице у датим условима.

Уопште, добијамо формализам који изједначава слободу, дејство и информацију. Тада пишемо

$$L = \sum_k \lambda_k \Delta p_k \Delta x_k = \sum_k \ln \exp[\lambda_k \Delta p_k \Delta x_k], \quad (2.12)$$

где коефицијенте $\lambda_k \in \mathbb{C}$ бирамо према применама. Посебно су таласне функције квантне механике ψ_k врсте информација перцепције и, као што знамо, њихове линеарне комбинације

$$\psi = \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 + \cdots + \alpha_n\psi_n, \quad (2.13)$$

где скалар $\alpha_k \in \mathbb{C}$ дефинише вероватноћу k-те обзервабле, вектори су са репрезентацијама квантних стања.

Доследно (2.12), тумачимо „$\exp[-\lambda_k \Delta p_k \Delta x_k]$“ као (неку) просечну вероватноћу информације „$-\ln \exp[\lambda_k \Delta p_k \Delta x_k]$“, па онда и „$\exp[\lambda_k \Delta p_k \Delta x_k]$“ као одговарајући (средњи) број „једнаковероватних“ исхода опита ω_k.

[2] Функционал је функција која пресликава векторе у скаларе.

Информација перцепције постиже најмању вредност када су дате индивидуе нежива бића, када њихове трајекторије задовољавају Ојлер-Лагранжове једначине и *принцип најмањег дејства* физике. У супротном случају имамо физичке системе са вишковима дејства односно информације чија кретања нису решења поменутих једначина.

2.2.2 Шварцова неједнакост

У алгебри унитарних оператора посебну улогу има следећа неједнакост коју је доказао *Коши*[3] 1821. у случају простора X^n, а која је у специјалном случају $n = 3$ последица једног идентитета којег је доказао *Лагранж*[4] 1773. године, а за простор функција доказали су је *Буњаковски*[5] 1859. и *Шварц*[6] 1885. године. Користимо уобичајену ознаку за апсолутне вредности броја, односно норме вектора $|x| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$.

Теорема 2.2.1 (Шварцова неједнакост)**.** *За произвољне векторе x и y унитарног простора X важи неједнакост*

$$|\langle x|y\rangle| \leq |x||y|, \tag{2.14}$$

при чему важи једнакост акко[7] *су вектори x и y линеарно зависни.*

Доказ. Крећемо од очигледне неједнакости:

$$0 \leq |\langle x|x\rangle y - \langle y|x\rangle x|^2 =$$

$$= |\langle x|x\rangle y|^2 + |\langle y|x\rangle x|^2 - \langle\langle x|x\rangle y|\langle y|x\rangle x\rangle - \langle\langle y|x\rangle x|\langle x|x\rangle y\rangle$$

$$= |x|^4|y|^2 + |\langle y|x\rangle|^2|x|^2 - |x|^2\langle x|y\rangle\langle y|x\rangle - |x|^2\langle y|x\rangle\langle x|y\rangle$$

$$= |x|^2(|x|^2|y|^2 - |\langle x|y\rangle|^2),$$

а отуда $|\langle x|y\rangle| \leq |x||y|$ за $x \neq 0$. Али та релација важи и за $x = 0$. Са друге стране, знак једнакости даје $\langle x|x\rangle y - \langle y|x\rangle x = 0$, из чега следи зависност вектора x и y. Тиме је теорема доказана. □

У случају вектора расподела вероватноћа, као код суперпозиција квантне механике, биће $|x| = |y| = 1$, теорема 2.2.1 каже да је $|\langle x|y\rangle| \leq 1$ и да једнакост важи акко су вектори зависни. У случају да су вектори независни, њихов скаларни производ даје мање вероватноће што значи већу укупну информацију.

Другим речима, зависни вектори x и y унитарног простора X скаларним производом $\langle x|y\rangle$ тако су спрегнути да имају мању информацију. Ово је појачање недавног мог прилога којег сам додао књизи „Минимализам информације“ (в. [2]), иначе углавном завршене у лето 2019. и необјављене до лета 2020. године. Не само у случају фермиона него и шире, информација перцепције $\langle x|y\rangle$ *здружених* вектора x и y мања је од збира њихових појединих информација.

Сазнање здруживања у комбинацији са *принципом информације*, да природа шкртари са емисијама информације, има разних последица. На пример, информације се радо удружују као да су вођене неким привлачним силама. Квантна спрегнутост као

[3] Augustin-Louis Cauchy 1789-1857, француски математичар.
[4] Joseph-Louis Lagrange 1736-1813, италијански математичар.
[5] Viktor Bunyakovsky 1804-1889, руски математичар.
[6] Hermann Schwarz 1843-1921, немачки математичар.
[7] акко – ако и само ако

посебна врста здруживања такође је стање узајамне зависности, а оно је већ познато и признато у физици.

Мање је познато да се о електрону у атому може говорити као о врсти спрегнутости, тако да му је потребно додати енергију да би се он ослободио те спреге. Такође, да је играч у *Нешовом*[8] еквилибријуму[9] у врсти спреге из које само са додатним ризиком и тактиком може тражити излаз, или живо биће прилагођено својој околини је у здружености из које се може извлачити тек са додатним слободама.

Са друге стране неједнакости (2.14) стоји питање о минимуму скаларног производа, односно о максимуму информације наводног удруживања. Из алгебре знамо да се најмања вредност $|\langle x|y\rangle|$ постиже са нултим скаларним производом и то када су вектори x и y ортогонални. У реалном свету то није могуће, али јесте ако један од вектора припада реалном а други псеудо-реалном свету. То нас води до *Еверетових* „много-светова“ које сам називао и *псеудо-реалностима*, или „паралелним реалностима“. Овај последњи израз долази од појављивања децимала броја $\pi = 3,14159265359\ldots$ које наилазе као случајни бројеви, али их у математици називамо псеудо-случајним.

Поред уобичајених примера норме, интензитета вектора ту је и потенцијал (силе, енергије, дејства, информације). Ако правац и смер вектора тада одређује градијент норме, онда су простори константне норме једнодимензионални. Без напетости нема поља сила, нема размене енергије, дејства, емисије информације. Међутим, стања веће и мање хомогене напетости у теорији информације не могу бити иста, али то је неки други део ове приче.

2.2.3 Нормиран простор

Норма вектора као да се „топи“ сабирањем, или рецимо потенцијал збира мањи је од збира потенцијала. У другој интерпретацији, свака страница троугла мања је од збира остале две а већа је од њихове разлике. То је садржај следеће теореме.

Теорема 2.2.2 (Неједнакост троугла)**.** *За произвољне векторе важи*

$$|x+y| \leq |x| + |y|, \quad x, y \in X,$$

при чему важи једнакост акко су вектори линеарно зависни.

Доказ. Користимо Шварцову неједнакост:

$$|x+y|^2 = \langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle y|y\rangle + 2\Re\langle x|y\rangle \leq$$

$$\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2.$$

Према томе је $|x+y| \leq |x| + |y|$. □

Ставимо ли $z = x + y$ имамо $|x| = |z + (-y)| \leq |z| + |y|$ и $|y| \leq |z| + |x|$, па са претходном неједнакошћу добијамо

$$|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|, \quad x, y \in X. \tag{2.15}$$

[8] John Forbes Nash Jr. 1928-2015, амерички математичар.

[9] Нешов еквилибријум – (у економији и теорији игара) стабилно стање система који укључује интеракцију различитих учесника, у којем ниједан учесник не може добити једностраном променом стратегије ако стратегије осталих остану непромењене.

То комплетира теорему коју називамо неједнакост троугла. Из претходне две теореме закључујемо да функција $x \to |x|$, која вектору x придружује његову норму, број $|x|$, има следећа својства.

За векторе $x, y \in X$ и скалар $\lambda \in \Phi$ важе особине *норме вектора*:

1. $|x| \geq 0$,
2. $|x| = 0 \iff x = 0$,
3. $|\lambda x| = |\lambda||x|$,
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Векторски простор у којем је сваком вектору x придружен број $|x|$ са сва четири наведена својства зове се нормиран векторски простор.

Нормирани простор је специјалан случај унитарних, при чему се норма вектора изражава помоћу скаларног производа $|x| = \langle x|x\rangle^{1/2}$. Отуда је:

$$|x + y|^2 = \langle x + y|x + y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle$$

$$|x - y|^2 = \langle x - y|x - y\rangle = \langle x|x\rangle - \langle x|y\rangle - \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle,$$

па сабирањем налазимо

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2. \tag{2.16}$$

То је позната *релација паралелограма* разапетог векторима x и y, са дијагоналама њиховим збиром и разликом.

Кажемо да је вектор e *нормиран* или јединични вектор, ако је $|e| = 1$. За векторе x и y кажемо да су (узајамно) *ортогонални* или окомити када је $\langle x|y\rangle = 0$. За скуп вектора кажемо да је ортогоналан ако су било која два вектора тога скупа међу собом окомита. Скуп вектора је *ортонормиран* ако је он ортогоналан и ако је сваки његов вектор нормиран.

2.2.4 Ортонормирање вектора

У еуклидској геометрији сматрамо прилично јасним појам ортогоналности вектора па га онда имитирамо и тамо где то више није. Тако, векторе x и y унитарног простора X сматрамо ортогоналнима (узајамно окомитим) акко је њихов скаларни производ нула, односно

$$x \perp y \iff \langle x|y\rangle = 0, \quad x, y \in X, \tag{2.17}$$

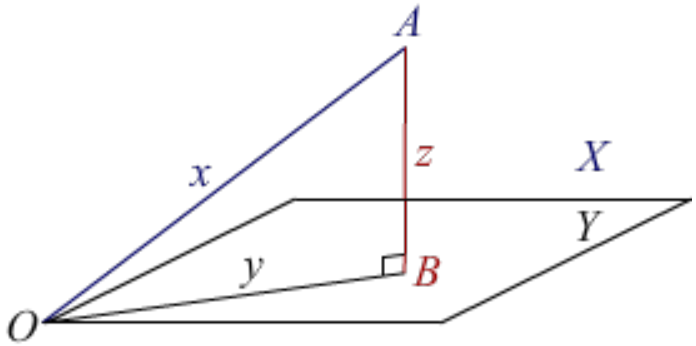
где се скаларни производ у алгебри обично пише $\langle x|y\rangle = x \cdot y$. Према томе, нула вектор ($x = 0$) је окомит на сваки вектор. На слици 2.1 је вектор $z = \overrightarrow{BA}$ окомит на раван Y, што можемо писати $z \perp Y$, па је онда x окомит на сваки вектор равни Y.

Са исте слике видимо да је $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$, или краће $x = y + z$. Кажемо да је вектор $y \in Y$ пројекција вектора $x \in X$ на потпростор $Y \subseteq X$, при чему је $|y| = |x| \cos\angle(x, y)$. Означимо одговарајуће јединичне векторе доњим индексима, рецимо:

$$e_x = \frac{x}{|x|}, \quad e_y = \frac{y}{|y|}. \tag{2.18}$$

То су јединични вектори правца и смера редом x и y, па је:

$$z = x - \langle x|e_y\rangle e_y = x - \frac{\langle x|y\rangle y}{|y|^2} = \frac{\langle y|y\rangle x - \langle x|y\rangle y}{|y|^2},$$



Slika 2.1: Пројекција вектора $x \in X$ на потпростор Y.

а отуда запис

$$z = \frac{1}{\Gamma(y)} \begin{vmatrix} \langle y|y\rangle & y \\ \langle x|y\rangle & x \end{vmatrix}, \quad |z|^2 = \langle z|z\rangle = \frac{\Gamma(y,x)}{\Gamma(y)}. \tag{2.19}$$

Овде користимо уобичајене ознаке за *Грамове детерминанте* вектора:

$$\Gamma(x_1) = |\langle x_1|x_1\rangle|, \ldots, \Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & \langle x_1|x_2\rangle & \ldots & \langle x_1|x_n\rangle \\ \langle x_2|x_1\rangle & \langle x_2|x_2\rangle & \ldots & \langle x_2|x_n\rangle \\ \ldots & & & \\ \langle x_n|x_1\rangle & \langle x_n|x_2\rangle & \ldots & \langle x_n|x_n\rangle \end{vmatrix}. \tag{2.20}$$

Као што је познато, помоћу сличних детерминанти могуће је ортонормирати произвољан скуп вектора.

Нека су x_1, x_2, x_3 три линеарно независна вектора у простору. На основу (2.19) налазимо прва два од вектора, а онда израчунавамо и трећи:

$$e_1 = \frac{x_1}{\sqrt{\Gamma(x_1)}}, \quad e_2 = \frac{\begin{vmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & x_1 \\ \langle x_2|x_1\rangle & x_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\Gamma(x_1)\Gamma(x_1,x_2)}}, \quad e_3 = \frac{\begin{vmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & \langle x_1|x_2\rangle & x_1 \\ \langle x_2|x_1\rangle & \langle x_2|x_2\rangle & x_2 \\ \langle x_3|x_1\rangle & \langle x_3|x_2\rangle & x_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\Gamma(x_1,x_2)\Gamma(x_1,x_2,x_3)}}. \tag{2.21}$$

То су ортонормирани вектори истог простора.

Претпостављам да су нам познати основни ставови о бази векторског простора, затим Грам-Шмитов поступак ортогонализације и следећи став о ортогонализацији који наводим без доказа.

Став 2.2.3 (Ортогонализација)**.** *Сваки $x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots \in X$ коначан и пребројив (ако постоји) низ линеарно независних вектора унитарног простора X може се заменити (ортонормирати) низом ортонормираних вектора $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ који разапиње исти простор као полазни низ.*

2.2.5 Пројекција вектора

На слици 2.1 је пример еуклидског простора X са вектором $x = \overrightarrow{OA}$ и потпростором $Y \subset X$ са вектором $y = \overrightarrow{OB}$ таквим да је вектор $z = x - y = \overrightarrow{BA}$ окомит на $y \in Y$. Аналогну ситуацију имамо у унитарним просторима о чему говори следећа теорема.

Теорема 2.2.4 (Пројекција)**.** *Ако је Y коначно димензионалан потпростор унитарног простора X онда се сваки вектор $x \in X$ може на јединствен начин писати у облику*

$$x = y + z$$

где је $y \in Y$ и $z \perp Y$.

Доказ. Егзистенција. Како је Y коначно димензионалан, то постоји база $y_1, y_2, \ldots, y_n$ потпростора Y, па постоји и ортонормирана база $e_1, e_2, \ldots, e_n$. За дати вектор $x \in X$ потпуно су одређени вектори:

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle e_k, \quad z = x - y.$$

Очигледно је $y \in Y$, а из

$$\langle z|e_j\rangle = \langle x - y|e_j\rangle = \langle x|e_j\rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle\langle e_k|e_j\rangle = 0$$

следи да је $z \perp e_1, e_2, \ldots, e_n$. Отуда је $z \perp Y$.

Једнозначност. Нека је

$$x = y + z = y' + z' \quad (y, y' \in Y;\ z, z' \perp Y).$$

Тада је:

$$y - y' = z' - z,$$
$$\langle y - y'|y - y'\rangle = \langle y - y'|z' - z\rangle = 0,$$

па је зато $y - y' = 0$, тј. $y = y'$, а тада је и $z' = z$. □

Ми знамо да је простор-време бар 6-димензионално[10] и да се састоји од по три димензије простора и три димензије времена од којих можемо опажати само по четири, три просторне и једну временску. Остатак од 4-Д реалног простор-времена до 6-Д простор-времена у текстовима које сам писао претходних година обично сам називао *паралелном реалношћу*, али можете их називати и *много светова* по Еверету, или *псеудо-реалношћу* што би било принципијелније рецимо од *мултиверзума* који је идеја која се у овом или оном облику провлачи још из времена древне грчке митологије. За разлику од других „мултиверзума“ нормална физичка комуникација са „паралелном реалношћу“ није могућа без нарушавања закона одржања.

Не бавимо се овде доказима „много светова“ него их само претпостављамо у облику да су у њима инваријантни закони физике, односно квантне механике, што значи да можемо сматрати да они са нашом реалношћу чине један Хилбертов 6-Д векторски простор X унутар којег је Y наше 4-Д простор-време.

Став о ортогонализацији онда каже да се „много светова“ могу разапети на ортогоналне обзервабле „реалности и паралелних реалности“, а теорема о пројекцији даље говори о могућности ортогоналне пројекције било којег вектора (квантног стања) тог простора на реалност, штавише, о њеној јединствености.

Са друге стране гледајући, са становишта квантне механике, ортогонална пројекција вектора x на y одређује вероватноћу да квантно стање x испољи својство y. Скаларни производ два вектора је мера њихове спрегнутости, или адаптације (fidelity), која се такође изражава вероватноћом. Према томе, ортогонални вектор (z) на реални вектор ($y \in Y$) увек је бар псеудо-реалан (слика 2.1).

[10] Простор-време: `http://izvor.ba/rastko-vukovic-vektorom-od-londona-do-beograda/`

2.3 Метрички простор

Метрички простор је скуп M на коме је дефинисана раздаљина, метрика $d(a,b)$ између произвољних елемената $a,b \in M$, односно функција $d : X \times X \to \mathbb{R}$ таква да је:

1. $d(x_1,x_2) \geq 0$ – ненегативност,
2. $d(x_1,x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$,
3. $d(x_1,x_2) = d(x_2,x_1)$ – симетрија,
4. $d(x_1,x_3) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3)$ – неједнакост троугла,

за све $x_1,x_2,x_3 \in X$. Такву функцију називамо *метриком* датог простора.

Лако је проверити да функција $d(x,y) = |x-y|$ за x и y из нормираног простора има својства метрике. Како метрички простор не мора бити чак ни линеаран, он је шири појам од нормираног простора. Његове елементе називамо тачкама.

Када су два метричка простора X и Y снабдевена метрикама d_X и d_Y тако да је $Y \subset X$ и $d_X = d_Y$ за сваки пар тачака из Y, онда за Y кажемо да је метрички *потпростор* од X. Сваки део метричког простора X може се схватити као његов метрички потпростор у којем је метрика кажемо *индуцирана* метриком X.

Два метричка простора X и Y су *изометрична* ако између њих постоји обострано једнозначно (бијективно) пресликавање f такво да за сваки пар тачака $x_1,x_2 \in X$ важи

$$d_Y[f(x_1),f(x_2)] = d_X(x_1,x_2). \tag{2.22}$$

Такво пресликавање f је изометрија између простора X и Y.

Растојање између скупова $A,B \subset X$ метричког простора дефинишемо помоћу *инфимума*, тзв. највеће доње међе

$$d(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x,y), \tag{2.23}$$

а ако се скуп B састоји од само једне тачке b, говоримо о растојању тачке до скупа

$$d(b,A) = d(\{b\},A) = \inf_{x\in A} d(b,A). \tag{2.24}$$

Дијаметар скупа $A \subset X$ дефинишемо помоћу *супремума*, тзв. најмање горње међе

$$d(A) = \sup_{x\in A, y\in A} d(x,y). \tag{2.25}$$

Кажемо да је скуп A *ограничен* ако има коначан дијаметар.

2.3.1 Затворени и отворени скупови

Сферу са центром a полупречника ρ образују оне тачке $x \in X$ које задовољавају услов $d(a,x) = \rho$. Скуп тачака $x \in X$ за које је редом:

$$d(x,a) < \rho, \quad d(x,a) \leq \rho, \tag{2.26}$$

назива се отворена односно затворена *кугла* са центром у тачки a и полупречником ρ.

У уџбенику функционалне анализе [14] отворена кугла означава се са $K]a,\rho[$, затворена са $K[a,\rho]$, а када је свеједно да ли је отворена или затворена са $K(a,\rho)$. Идеја

се поопштава на простор $\mathbb{R}^n$ са произвољним $n \in \mathbb{N}$, па се за скуп $A \subset X$ каже да је отворен ако за свако $x \in A$ постоји неко $\rho > 0$ тако да је $K]x, \rho[\subset A$. Тако су „кугле“ произвољне димензије n, па и интервали, за $n = 1$.

Отворена кугла је најједноставнији отворен скуп, јер за $x \in K]a, \rho[$ је $d(x, a) < \rho$, па $K]x, \rho - d(x, a)[\subset K]a, \rho[$. Празан скуп је отворен, јер не садржи ни једну тачку којој би се наметнуо одређени услов. Такође је јасно да је читав простор отворен скуп. У овом тексту отворене скупове означаваћемо словом G и индексима.

Унија ма које колекције отворених скупова $\{G_i\}_{i \in I}$ је *отворен скуп*. Наиме, када $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$, тада за неко $i_0 \in I$, $x \in G_{i_0}$. Но како је, према претпоставци G_{i_0} отворен скуп, постоји кугла $K]x, \rho[\subset G_{i_0}$; тим пре је и $K]x, \rho[\bigcup_{i \in I} G_i$, што је требало показати.

Пресек коначно много отворених скупова је отворен скуп. Наиме, из $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ следи $x \in G_i$ за свако $i = 1, 2, \ldots, n$. Како су сви ови скупови отворени, то постоје позитивни бројеви ρ_i, за све индексе $i = 1, 2, \ldots, n$, тако да је редом $K]x, \rho_i[\subset G_i$. Ако ставимо $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n\}$, кугла $K]x, \rho[$ биће у сваком од скупова G_i, па према томе и у њиховом пресеку. Овај је, дакле, отворен скуп.

Скуп $A \subset X$ је *затворен* ако му је комплемент у односу на читав простор отворен скуп. На пример, затворена кугла је затворен скуп, сваки коначан скуп је затворен, свака сфера је затворен скуп. Затворен скуп означаваћемо словом F.

Због дуалности појмова отворених и затворених скупова, из претходних непосредно следе следећи ставови. Читав простор и празан скуп су затворени скупови. Пресек ма које колекције затворених скупова је затворен скуп. Унија коначно много затворених скупова је затворен скуп.

Као и размак $]a, b] \subset \mathbb{R}$ највећи број скупова није ни отворен ни затворен. Физичкој супстанци припадају својства само затворених скупова. Њихови пресеци и уније коначни су скупови који су према горњем затворени, а посебно су празан скуп и читав простор и физичке и нефизичке ствари.

2.3.2 Околина скупа

Околина скупа $A \subset X$ је сваки скуп V који садржи један отворен скуп у коме лежи скуп A. Према томе, скуп A је отворен тада и само тада ако је околина сваке своје тачке. Наиме, ако је A отворен скуп он је већ по дефиницији околина сваке своје тачке. Обрнуто, ако је A околина произвољне своје тачке x, онда свакој тој тачки одговара отворен скуп такав да је $x \in G_x \subset A$. Али из

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} G_x \subset A,$$

следи

$$A = \bigcup_{x \in A} G_x,$$

па како је унија отворених скупова отворен скуп, то је A отворен скуп.

Тачка x је *унутрашња тачка* скупа A ако је A њена околина. Колекција свих унутрашњих тачака скупа A образује *унутрашњост* од A коју означавамо са $\mathring{A}$, кружић изнад ознаке скупа. Очигледно је $\mathring{A} \subset A$. Унутрашњост размака (a, b) је отворени размак $]a, b[$. Унутрашњост скупа рационалних бројева је празан скуп.

Важи став да је $\mathring{A}$ највећи отворени скуп садржан у A, па су, према томе, отворени скупови окарактерисани са $\mathring{A} = A$. Такође, унутрашњост унутрашњости једнака је унутрашњости датог скупа. У случају два скупа, ако је први подскуп другог, онда

је унутрашњост првог подскуп унутрашњости другог. Унутрашњост пресека скупова једнака је пресеку њихових унутрашњости. Доказе ових ставова погледајте у [14].

Тачка x је *адхерентна тачка* скупа A ако у свакој њеној околини лежи бар једна тачка из A. Колекција адхерентних тачака скупа A образује *адхеренцију* од A коју означавамо са $\bar{A}$. Очигледно је $A \subset \bar{A}$, адхеренција размака $(a, b) \subset \mathbb{R}$ је затворени размак $[a, b]$, адхеренција скупа рационалних бројева је скуп свих реалних бројева.

Приметимо, ако x није унутрашња (адхерентна) тачка скупа онда је она адхерентна (унутрашња) тачка комплементног скупа. Због ове дуалности и претходних ставова, важе и следећи. Скуп $\bar{A}$ је најмањи затворени скуп који садржи A, за затворене скупове важи $\bar{A} = A$, $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$, из $a \subset B$ следи $\bar{A} \subset \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Тачка *међе* (руба) скупа је она која је истовремено адхерентна тачка и скупа и његовог комплемента. Колекција свих тачака међе скупа A образује међу (руб) од A. Тако, међу размака $(a, b) \subset \mathbb{R}$ чине тачке a и b. Међа скупа рационалних бројева је скуп реалних бројева. Међа сваког скупа је затворен скуп, јер је она по дефиницији пресек адхеренције скупа и комплемента скупа, а они су затворени, па је и њихов пресек затворен.

2.3.3 Тачка нагомилавања

Тачка x је *изолована тачка* скупа A ако постоји околина тачке x у којој, сем x, нема других тачака из A. Тачка x је *тачка нагомилавања* скупа A ако у свакој њеној околини лежи бар једна тачка из A различита од x.

Колекција тачака нагомилавања скупа A образује *изведени скуп* од A који означавамо са A'. Тачка нагомилаања може али не мора припадати скупу. На пример, скупу $\{1/n\}$, за $n = 1, 2, 3, \ldots$, не припада нула, његова једина тачка нагомилавања. Изведени скуп рационалних бројева је скуп реалних бројева.

Приметимо да у општем случају $(A')'$ није једнако A'. На пример, поменутом скупу $\{1/n\}$ изведени је $\{0\}$ а овоме изведени је празан скуп.

Међутим, за произвољан скуп A важи $\bar{A} = A \cup A'$. Наиме, ако $x \notin \bar{A}$ тада постоји околина тачке x у којој нема тачака из A. Тада x не припада ни A ни A', па ни њиховој унији. Обрнуто, ако $x \notin A \cup A'$, постоји околина у којој нема тачака из A, те не може лежати у $\bar{A}$.

Да је скуп A затворен тада и само тада ако му припадају све тачке нагомилавања, тј. ако је $A' \subset A$, доказује се овако. Ако је A затворен скуп, тј. $\bar{A} = A$, биће на основу претходног $A = A' \cup A$, одакле следи $A' \subset A$. Обрнуто, ако је $A' \subset A$ биће $A' \cup A = A$, дакле и $\bar{A} = A$, па је A затворен.

У функционалној анализи и топологији за скуп A кажемо да је *перфектан*, ако му припадају све тачке нагомилавања и ако је свака његова тачка тачка нагомилавања, тј. ако је $A' = A$. Затворен размак у $\mathbb{R}$ је перфектан скуп, а и скуп свих реалних бројева је перфектан.

Укратко, сваки затворен скуп је дисјунктна унија својих изолованих тачака и својих тачака нагомилавања, а то је управо оно што имамо са физичким својствима. Раније сам доказивао да својство за које важи закон одржања (информација, енергија) не може бити бесконачно дељиво, оно је дискретно, па ова сазнања из *функционалне анализе* о околинама сада можемо посматрати и као даљу расправу о везама између физичког конкретног и апстрактног математичког.

2.3.4 Свугде густ скуп

Скуп A је *свуда густ* у скупу B, ако је било која тачка из B адхерентна тачка од A, тј. ако је $B \subset \bar{A}$. Другим речима, скуп A је свуда густ у B ако се у свакој околини било које тачке из B налази бар једна тачка из A. На пример, скуп рационалних бројева $\mathbb{Q}$ је свуда густ у скупу реалних бројева $\mathbb{R}$.

Скуп $A \subset X$ је *нигде густ* у X, ако његова адхеренција $\bar{A}$ не садржи ни једну куглу или, што је исто, ако $\bar{A}$ нема унутрашњих тачака. На пример, скуп целих бројева $\mathbb{Z}$ је нигде густ у $\mathbb{R}$. Коначна унија нигде густих скупова је нигде густ скуп, али то не мора бити тачно за пребројиву унију. Рецимо, скуп рационалних бројева је пребројива унија нигде густих скупова који се састоје од по једне тачке, али сам није нигде густ.

Скуп $A \subset X$ је *прве категорије* у X, ако је унија највише пребројиво нигде густих скупова у X. Сваки скуп који није прве, по дефиницији је *друге категорије* у X.

Простор X је друге категорије у самом себи тада и само тада ако, ма како га приказали као унију од највише пребројиво[11] много затворених скупова, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, у бар једном од (затворених) скупова F_i лежи нека кугла.

Наиме, када ни у једном од скупова F_i не би лежала нека кугла, сви скупови F_i били би нигде густи у X, па би X, као највише пребројива унија нигде густих скупова, био скуп прве категорије.

Обрнуто, ако X није друге категорије у самом себи, он се може приказати као највише пребројива унија нигде густих скупова, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, но тада је и $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$, тј. X се може приказати као највише пребројива унија затворених скупова од којих ни један не садржи неку куглу. Тиме је и друга половина тврдње доказана.

Примењено на физику, низ у времену реализованих догађаја је дискретан скуп, скуп свих њихових могућности је континуум. Нереализоване могућности припадају мултиверзуму *паралелних реалности*[12], свугде густом скупу без непосредне физичке комуникације са реалношћу.

2.3.5 Конексан простор

Простор X је *конексан* ако се не може приказати као унија два непразна дисјунктна отворена скупа из X. Обрнуто речено, простор X није конексан, тј. *неконексан* је ако постоје отворени скупови $G_1 \neq 0$, $G_2 \neq 0$, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, такви да је $X = G_1 \cup G_2$. Како је G_2 комплемент од G_1 и G_1 је комплемент од G_2, то су G_1 и G_2 истовремено и затворени скупови, па је у дефиницији конексности могуће реч „отворени“ заменити са „затворени“ и добити и следеће две дефиниције.

Простор X је конексан ако у њему, сем празног скупа и читавог простора, нема другог скупа који би истовремено био и отворен и затворен. Наиме, ако би A био такав један скуп, такав би био и комплемент тог скупа, $C(A)$, па $A \cup C(A) = X$ не би био конексан простор.

Скуп $A \subset X$ је конексан ако је такав посматран сам за себе као метрички простор. На пример, сваки конексан скуп на реалној правој своди се на размак произвољног типа, коначан или бесконачан.

Конексни скупови су нам интересантни јер је физички простор-време такав. Он се не може приказати као унија два своја непразна дисјунктна скупа, јер би то било

[11] не више од пребројиве бесконачности

[12] Не ограничавам се на само ову врсту „мултиверзума”.

директно мешање физичког и апстрактног. Зато је вакуум условно речено физички „бесконачан“ скуп, а васиона „коначан“.

2.3.6 Канторов скуп

Сваки непразан отворени скуп у $\mathbb{R}$ је унија највише пребројиво много дисјунктних отворених размака.

Наиме, нека је дата тачка $x \in G \subset X$ у отвореном скупу. Тада постоји отворен размак да, $x \in I \subset G$, који можемо увек изабрати тако да су му крајеви рационални бројеви. Ако свакој тачки придружимо један такав размак имаћемо пребројиву колекцију размака. У колекцији тих размака уведимо релацију еквиваленције, $I' \sim I''$, ако постоји дисјунктан коначан низ размака $I_1 = I', I_2, \ldots, I_n = I''$ из те колекције. Одговарајући скуп класа еквиваленције је очигледно пребројив.

Из претходног става непосредно следи: Сваки непразан затворен скуп у $\mathbb{R}$ добија се када се са реалне праве одстрани највише пребројиво много отворених размака.

Ова два става говоре нам како о отвореним и затвореним скуповима тако и о природи бесконачног (апстрактног) и коначног (физичког), јер је сваки коначан скуп отворен, а свако својство физичке информације је коначно дељиво. Када бисмо даље апстраховали и делили те најмање делиће физичке информације, добили бисмо највише пребројиво много отворених скупова.

Најједноставнији затворени скупови у $\mathbb{R}$ су затворени размаци, изоловане тачке и уније коначно много таквих. Оне су комплементи отворених скупова који су, дакле, унија коначно много дисјунктних отворених размака. Занимљив пример такве уније је тзв. *Канторов скуп* који ћу сада описати.

Нека је F_0 затворени размак $[0, 1]$. Одстранимо из F_1 отворени размак $]1/3, 2/3[$ и оно што остане означимо са $F_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Одстранимо средње трећине ова два размака и оно што остане означимо са $F_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Настављамо овај поступак без краја, добијамо низ затворених скупова $F_n \supset F_{n+1}$, при чему је F_n унија 2^n затворених размака од којих је сваки дужине 3^{-n}.

Канторов скуп F дефинисан је са

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n. \tag{2.27}$$

На основу претходних ставова видимо да је он затворен, а тачке

$$0,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{8}{9},\ \ldots, \tag{2.28}$$

као крајеви одстрањених отворених размака, очигледно припадају скупу F, али оне нису једине тачке тог скупа.

Показује се (в. [14]) да Канторов скуп F образују оне и само оне тачке размака $[0, 1]$ које писане *тријадски*, у бази три цифаре 0, 1 и 2, немају јединица. Он има кардинални број континуума. Тачке (2.28) Канторовог скупа називамо *тачкама прве врсте* и њих има пребројиво много, а све остале тачке тог скупа називамо *тачкама друге врсте*. Канторов скуп F је перфектан скуп, а његове тачке прве врсте су тачке нагомилавања тачака прве врсте. Канторов скуп је нигде густ.

На пример, када би се сва квантна стања састојала од *кјутрита* (енг. qutrit), суперпозиција са три исхода (три узајамно ортогонална квантна стања), могли бисмо формирати њихов Канторов скуп и одговарајуће тријадске записе. Након реализације

исходу придружимо цифру 1. Сви ти бројеви који садрже само јединице чине пребројив скуп реалних исхода, а они са остале две цифре, 0 или 2, непребројив скуп паралелних реалности. Слично је и са сложенијим суперпозицијама и одговарајућим интерпретацијама Канторовог скупа, сложенијих подела интервала и већих *бројевних база.*

Канторов скуп је занимљив пример и за објашњење покривања отвореног скупа са пребројиво затворених коцки. Наиме, под *затвореном коцком* у $\mathbb{R}^n$ чије су стране паралелне координатним равнима подразумевамо скуп

$$\{x = (\xi_\nu) : \ \alpha_\nu \leq \xi_\nu \leq \alpha_\nu + \alpha, \ \nu = 1, 2, \ldots, k\}. \tag{2.29}$$

Сваки непразан отворен скуп у $\mathbb{R}^n$ $(k \geq 2)$ може се приказати као пребројива унија затворених коцки које две и две немају заједничких унутрашњих тачака и чије су стране паралелне координатним равнима. Овај став[13] указује на могућност формирања апстрактног помоћу физичког.

2.3.7 Реална права

На скупу реалних бројева важе следећа два, за функционалну анализу веома важна става која се могу преносити у опште метричке просторе разапете (грађене) таквим, континуалним координатним осама. Прва је теорема *Болцана*[14] и *Вајерштраса*[15].

Теорема 2.3.1 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Сваки ограничени бесконачни скуп у* $\mathbb{R}$ *има бар једну тачку нагомилавања.*

Доказ. Нека тачке скупа леже у размаку $[a, b]$, $b - a < +\infty$. Поделимо овај на два дела и нека је $[a_1, c_1]$ један од тих делова који има бесконачно датих тачака. Изабрани опет поделимо и бирајмо део са бесконачно много тачака. Настављајући овај поступак добијамо низ уметнутих интервала $[a_n, c_n]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ од којих сваки садржи бесконачно много тачака. Низ интервала тежи једној тачки која је тачка нагомилавања датог низа тачака. □

На пример, последица ове теореме је тврђење да је свака непрекидна функција на затвореном ограниченом интервалу ограничена. Други пример је Вајерштрасов став који каже да се свака непрекидна функција може униформно апроксимирати полиномима. То значи да је скуп полинома свуда густ у скупу $C[a, b]$ непрекидних функција на датом интервалу са метриком

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|. \tag{2.30}$$

На корак одатле су познате теореме о развоју периодичних функција у тригонометријске и друге редове. Оне омогућују представљање неизвесности квантних честица.

Теорема 2.3.2. *Нека је* F *затворен скуп у* $\mathbb{R}$*, ограничен с десне (леве) стране. Тада* $\sup F$ *(*$\inf F$*) припада скупу.*

Доказ. Нека је $b = \sup F$ и претпоставимо да $b \notin F$. На основу дефиниције супремума, за свако $\epsilon > 0$ постоји тачка $x \in F$ таква да је $b - \epsilon < x < b$, тј. у свакој околини тачке b лежи бар једна тачка x из F и $x \neq b$, јер b не припада F. Дакле, b је тачка нагомилавања F и не припада F, а то је контрадикција, јер је F затворен скуп. □

[13] Доказ је у [14].
[14] Bernard Bolzano (1781-1848), чешки математичар италијанског порекла.
[15] Karl Weierstrass (1815-1897), немачки математичар, често називан „оцем модерне анализе“.

Две реалне праве разапињу раван комплексних бројева који су скалари Хилбертовог векторског простора, а чија репрезентација је квантна механика. То је један од разлога због којих нам требају ови чувени ставови. Други добијемо када простор-време васионе пројектујемо на њен простор. Еволуција материјалног догађаја постаје бесконачан низ тачака простора чију тачку нагомилавања интерпретирамо тачком нагомилавања прошлости. Ова интерпретација ће добијати на значају са евентуалним прихватањем идеје о простору (свемира) који памти своју историју.

2.3.8 Сеперабилан простор

Метрички простор X је *сепарабилан* ако у њему постоји највише пребројив[16] свуда густ скуп тачака.

На пример, сепарабилан је простор $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) чији су елементи уређени низови од n реалних (или комплексних) бројева. Тако су тачке $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ и $z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ елементи простора $\mathbb{R}^n$. Метрика се у том простору може увести на више начина:

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{1/p}, \tag{2.31}$$

при чему за $p = 2$ добијамо класичну еуклидску удаљеност, а у граничном случају $p \to \infty$ имамо $d_\infty(x, y) = \max_{1 \le k \le n} |\xi_k - \eta_k|$. Када у овим примерима пређемо на граничне случајеве $n \to \infty$, добијамо такође сепарабилан простор ℓ_p, за $1 \le p < \infty$, где $\ell_1 = \ell$. Простор непрекидних функција $C[a, b]$ метрике (2.30) такође је сепарабилан.

Колекција отворених скупова у метричком простору образује *базу* простора ако се сваки непразан отворен скуп простора може приказати као унија скупова из базе. За простор кажемо да је највише пребројиве базе ако у њему постоји база са највише пребројиво много елемената. Лако се доказује[17] да је простор највише пребројиве базе тада и само тада ако је сепарабилан.

Колекција скупова је једно *покривање* неког скупа ако свака тачка датог скупа лежи у бар једном скупу колекције. Када је реч о колекцији отворених скупова онда говоримо о отвореном покривању. Када имамо једно отворено покривање сепарабилног простора, онда се из њега може издвојити једно највише пребројиво покривање датог простора[18].

2.3.9 Низови тачака

Нека је X метрички простор и $x_n \in X$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ низ тачака, ознаке (x_n). Тачку $x \in X$ називамо *граничном вредношћу* низа (x_n), а за низ кажемо да *конвергира* ка тој тачки ако $d(x_n, x) \to 0$ када $n \to \infty$. Тада пишемо $x_n \to x$, или $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Другим речима, ако свакој околини $V_x \subset X$ тачке x одговара неки природан број n_0 да

$$n \ge n_0 \implies x_n \in V_x, \tag{2.32}$$

онда $x_n \to x$ када $n \to \infty$.

[16] не већи од пребројиво бесконачног

[17] Видети у било којем бољем уџбенику функционалне анализе.

[18] LCT: `http://mathonline.wikidot.com/the-lindeloef-covering-theorem-in-euclidean-space`

Сваки конвергентан низ је *ограничен*. Наиме, због $d(x, x_n) < \varepsilon$ за $n \geq n_0$ скоро све[19] тачке скупа $\{x_n\}$ налазе се у кугли $K]x, \varepsilon[$. За довољно велико ρ лежаће тада све тачке тог скупа у кугли $K]x, \rho[$.

За сваки стриктно растући низ природних бројева $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ низ (x_{n_k}) је *делимични низ* низа (x_n). Тачка x је *адхерентна вредност* низа (x_n) ако постоји делимични низ (x_{n_k}) који конвергира ка x.

Потребан и довољан услов да је x адхерентна вредност низа (x_n) јесте да свакој околини V_x тачке x и сваком природном броју m одговара природан број $p > m$ тако да је $x_p \in V_x$.

Наиме, услов је потребан јер за адхерентну вредност датог низа постоји делимичан низ (x_{n_k}) који конвергира ка x. У свакој околини V_x леже скоро сви чланови делимичног низа, па ма како велики био природан број m, постојаће довољно велико n_k тако да је $n_k > m$ и $x_{n_k} \in V_x$. Услов је довољан, јер ако је он испуњен из датог низа издвојићемо тоталном индукцијом делимични низ: $n_1 = 1$, а када дођемо до n_{k-1} изабраћемо n_k као први природан број већи од n_{k-1} за који је $d(x, x_{n_k}) < 1/k$. Значи $\lim_{k\to\infty} d(x, x_{n_k}) = 0$, тј. x је адхерентна вредност датог низа.

Свака адхерентна вредност низа (x_n) је једна адхерентна тачка скупа $\{x_n\}$, али није обрнуто. На пример, низ $1/n \in \mathbb{R}$ има једину адхерентну вредност нулу, али су сви елементи тог скупа заједно са нулом адхерентне тачке. Слична је разлика између адхерентне вредности низа (x_n) и тачака нагомилавања скупа $\{x_n\}$. Свака тачка нагомилавања тог скупа је адхерентна вредност одговарајућег низа, али није обрнуто, што видимо на примеру низа $1, 1, 1, \dots$ из $\mathbb{R}$ који има јединицу као адхерентну вредност, али одговарајући скуп има само један елеменат те нема тачку нагомилавања.

Укратко, ако са $\mathcal{U}(x_n)$ означимо колекцију адхерентних вредности низа (x_n), тада важе импликације

$$\{x_n\}' \subseteq \mathcal{U}(x_n) \subseteq \overline{\{x_n\}}, \tag{2.33}$$

где прим значи *изведени скуп*, колекцију тачака нагомилавања датог скупа, а горња црта *адхеренцију*, колекцију адхерентних тачака скупа. Обе ове инклузије могу бити стриктне.

Скуп адхерентних вредности низа је затворен скуп[20]. То значи да колекцији $\mathcal{U}(x_n)$ адхерентних вредности низа (x_n) припадају све његове тачке нагомилавања; ако је z тачка нагомилавање те колекције, она је и тачка нагомилавања скупа $\{x_n\}$. Из прве инклузије (2.33) следи затвореност скупа $\mathcal{U}(x_n)$. Наиме, ако је z тачка нагомилавања $\mathcal{U}$, за свако $\varepsilon > 0$ постојаће бар једна од z различита тачка x у $\mathcal{U}$, тако да је $d(z, x) < \varepsilon$. Како је x адхерентна вредност низа (x_n), постоји делимични низ $x_{n_k} \to x$. За довољно велико k је $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$, што заједно са $d(z, x) < \varepsilon$ даје

$$d(z, x_{n_k}) \leq d(z, x) + d(x, x_{n_k}) < 2\varepsilon,$$

тј. z је тачка нагомилавања скупа $\{x_n\}$.

Потребан и довољан услов да је x адхерентна тачка скупа A јесте да постоји низ тачака (x_n) из A који конвергира ка x.

Потребан и довољан услов да је x тачка нагомилавања скупа A јесте да постоји низ међусобно различитих тачака низа (x_n) из A који конвергира ка x.

Наиме, ако је x адхерентна тачка скупа A, тада у свакој кугли $K]x, 1/n[$ редом за $n = 1, 2, \dots$ лежи бар једна тачка x_n из A. Ове тачке x_n, које се све могу поклопити са

[19] Скоро сви – сем њих коначно много.

[20] Ови ставови су добро познати у функционалној анализи, па их не издвајам као посебне теореме.

x, образују низ који конвергира ка x. Ако је x тачка нагомилавања скупа A, тада се у свакој кугли $K]x, 1/n[$ може изабрати тачка x_n различита од свих претходно изабраних тачака. Јасно је да су наведени услови у оба случаја довољни.

Са овим појмовима функционалне анализе више ћемо се бавити када нам буду потребнија познавања импликација и других веза између конкретног и апстрактног, реалности и псеудо-реалности.

2.3.10 Комплетан простор

Низ (x_n) називамо *Кошијевим* ако за свако $\varepsilon > 0$ одговара природни број n_0 такав да $m > n \geq n_0$ имплицира $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Да је сваки Кошијев низ ограничен доказује се на следећи начин. Ако је (x_n) Кошијев низ, тада за $n = n_0$ важи $m > m_0 \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon$, па се скоро сви чланови низа (сем њих коначно много) налазе у кугли $K]x_{n_0}, \rho[$.

Да је сваки конвергентан низ Кошијев доказујемо на следећи начин. Ако $x_n \to x$, то за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0 тако да $n \geq n_0$ повлачи $d(x, x_n) < \varepsilon$, па за $m > n \geq n_0$ важи $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_m, x) + d(x, x_n) < 2\varepsilon$, што значи да је (x_n) Кошијев низ.

Обрнут став последњем не би био тачан. То демонстрира пример скупа рационалних бројева са уобичајено дефинисаним размаком и низ коначних децималних разломака $x_n \to x$ који добијамо када дати ирационални број x приближно пишемо са првих $n = 1, 2, 3, \ldots$ децимала. Такав низ, све тачнијег ирационалног броја x, Кошијев је у скупу рационалних бројева, али не конвергира рационалном броју.

Метрички простор је *комплетан* ако у њему сваки Кошијев низ конвергира. Оса реалних бројева је један комплетан простор, оса рационалних није. Метрички простор X је комплетан тада и само тада ако пресек сваког монотоно опадајућег низа затворених кугли K_n у X, чији низ полупречника тежи нули када $n \to \infty$, садржи једну једину тачку простора. Објашњење и доказе овог и следећа два става потражите у неком уџбенику метричког простора (в. [16]).

Нека је X комплетан метрички простор и нека је S неки његов потпростор. Ако је S затворен скуп у X, тада је и S, посматран за себе као метрички простор, један комплетан простор. Сваки комплетан метрички простор је *друге категорије* у самом себи (Baire Category Theorem).

О комплетирању простора говори следећи став. Нека је X некомплетан метрички простор. Тада постоји комплетан метрички простор S, тако да је један у њему свуда густ потпростор S^* изометричан са X. Кажемо да је простор S настао *комплетирањем* простора X.

2.3.11 Лимес низа

За низ (x_n) тачака у скупу реалних бројева, $\mathbb{R}$, кажемо да (одређено) *дивергира* ка $+\infty$ и пишемо $x_n \to +\infty$ ако сваком (ма како великом) реалном броју M одговара природни број $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да $n \geq n_0$ повлачи $x_n > M$. Симетрично значи $x_n \to -\infty$.

Низ тачака (x_n) у $\mathbb{R}$ *монотоно* расте ако је $x_n \leq x_{n+1}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Ако уместо „мање или једнако“ стоји релација „мање“, онда је низ стварно, или стриктно растући. Симетрично се дефинишу низови који монотоно и стварно опадају.

Нека је S непразан скуп у $\mathbb{R}$. За реалан број m кажемо да је *миноранта* скупа S када је $m \leq x$ за свако $x \in S$. За број m кажемо да је *инфимум* скупа S ако је m

минoранта скупа S и за сваки $\varepsilon > 0$ постоји $x \in S$ такав да је $x < m + \varepsilon$. У том случају пишемо $m = \inf S$.

Нека је S и даље непразан скуп у $\mathbb{R}$. За реалан број M кажемо да је *мајоранта* скупа S када је $M \geq x$ за свако $x \in S$. За број M кажемо да је *супремум* скупа S ако је M мајоранта скупа S и за сваки $\varepsilon > 0$ постоји $x \in S$ такав да је $x > M - \varepsilon$. Тада пишемо $m = \sup S$.

Другим речима, инфимум је највећа минoранта, а супремум је најмања мајоранта. Сваки непразан одозго ограничен скуп реалних бројева ($\mathbb{R}$) има супремум, а сваки одоздо ограничен има инфимум.

Монотоно растући низ (x_n), подразумева се реалних бројева, или конвергира ка $\sup\{x_n\}$ или дивергира ка $+\infty$ зависно од тога да ли је ограничен с десне стране или није. Симетричан став важи за монотоно опадајући низ. Ти се искази лако доказују као и следећи, *Вајерштрасов*[21] став за реалне низове: сваки ограничен низ реалних бројева има бар једну *адхерентну вредност.*

Нека је (x_n) низ реалних бројева и нека је $\mathcal{U}(x_n)$ скуп његових адхерентних вредности. *Лимес инфериор* и *лимес супериор* низа (x_n) дефинисани су са:

$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \inf \mathcal{U}(x_n), \quad \lim_{n\to\infty} \sup x_n = \sup \mathcal{U}(x_n), \tag{2.34}$$

где уместо $\inf\{x_n\}$ пишемо краће $\inf x_n$ и слично за супериор. Тако је $\limsup x_n = +\infty$ акко дати низ није ограничен с десне стране, односно $\liminf x_n = -\infty$ акко дати низ није ограничен с леве стране.

Следећа тврђења такође су добро позната па их само наводим без доказа. За реални низ, $-\infty < \limsup x_n < +\infty$, за свако $\varepsilon > 0$ постоји бесконачно много природних бројева, индекса n_k датог низа, таквих да је $x_{n_k} > \limsup x_n - \varepsilon$, или постоји природан број n_0 такав да је $x_n < \limsup x_n + \varepsilon$. Једини број који има обе наведене особине је управо $\limsup x_n$. Симетрична тврђења важе за лимес инфериор.

Нека је (x_n) низ реалних бројева. Тада је:

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} x_n, \quad \lim_{x\to\infty} \inf x_n = \sup_{k>1} \inf_{n\geq k} x_n. \tag{2.35}$$

Доказе ових ставова можете видети и у мојој књизи „Квантна механика“ [4].

2.3.12 Банахов став

Дата је фунција која пресликава метрички простор у самог себе, $f : X \to X$. Тачка $x \in X$ за коју је $f(x) = x$ назива се *непокретном тачком* пресликавања f. Довољне услове да пресликавање има једну и само једну *непокретну тачку* дао је Банах.

Пресликавање f комплетног[22] метричког простора (X, d) у самог себе је *контракција* ако постоји позитиван број $q < 1$ такав да за сваки пар тачака $x_1, x_2 \in X$ важи неједнакост

$$d[f(x_1), f(x_2)] \leq q d(x_1, x_2). \tag{2.36}$$

Теорема 2.3.3 (Банахов став)**.** *Контракција f комплетног метричког простора X у самог себе има једну и само једну непокретну тачку.*

[21] Karl Weierstrass (1815-1897), немачки математичар често називан „оцем модерне анализе“.

[22] Метрички простор X је комплетан ако сваки Кошијев низ тачака из X има лимес у X.

Доказ. Бирамо произвољну тачку $x_0 \in X$ и конструишемо низ сукцесивних апроксимација, тачака:

$$x - 1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad \ldots, \quad x_n = f(x_{n-1}), \quad \ldots \tag{2.37}$$

за $n = 1, 2, 3, \ldots$ и примећујемо да је то Кошијев низ (чији су чланови са довољно великим индексима довољно близу). Заиста,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d[f(x_n), f(x_{n-1})] \leq qd(x_n, x_{n-1})$$

и понављајући ово n пута налазимо

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0) = aq^n.$$

Према томе, за $m > n$ је

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \leq \\ &\leq aq^n + aq^{n+1} + \cdots + aq^{m-1} \leq \\ &\leq aq^n + aq^{n+1} + \cdots = \frac{aq^n}{1-q} \to 0, \quad m > n \to \infty. \end{aligned}$$

Како је X комплетан простор, постоји у X тачка x^* којој конвергира низ (x_n), тј.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*. \tag{2.38}$$

Но, како је f контракција, то је

$$d[x_{n+1}, f(x^*)] = d[f(x_n), f(x^*)] \leq qd(x_n, x^*),$$

па даље

$$\lim_{n\to\infty} d[x_{n+1}, f(x^*)] = 0,$$

или, што је исто,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = f(x^*).$$

Због (2.38) је $x^* = f(x^*)$, тј. x^* је непокретна тачка пресликавања f.

Тиме је доказана егзистенција непокретне тачке, а даље доказујемо да је она и једина. Претпоставимо да f сем x^* има још једну непокретну тачку $x^{**} \neq x^*$. Тада

$$d(x^{**}, x^*) = d[f(x^{**}), f(x^*)] \leq qd(x^{**}, x^*),$$

па због $d(x^{**}, x^*) > 0$ следи $q \geq 1$, што је у контрадикцији са претпоставком да је f контракција. □

Једноставан пример примене Банаховог става добијамо стављајући на тло мапу краја у којем се налазимо. Тада постоји јединствена тачка на мапи која се тачно поклапа са местом на тлу.

Други пример добијамо полазећи од троугла ABC. Средине његових страница, тачке $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$ и $C_1 \in AB$ формирају нови троугао $A_1B_1C_1$, а средине тих страница нови и тако даље, n-те средине формирају n-ти троугао $A_nB_nC_n$. Може се показати да низ ових троуглова конвергира једној тачки која је тежиште сваког троугла у низу.

Сличан пример је „слика у слици“ (mise en abyme), постављање копије слике унутар саме слике. Добија се наизглед бесконачан низ *рекурзија* (поступак или функција која у својој дефиницији користи саму себе) које, према Банаховом ставу, садрже једну непокретну тачку.

Пример 2.3.4. *Егзистенција решења обичних једначина.*

Објашњење. Тражимо решење једначине $F(x) = 0$ диференцијабилне функције $F(x)$, при чему је $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ и $0 < m \leq F'(x) \leq 1 - \lambda m$.

Посматрајмо произвољну реалну диференцијабилну функцију $f(x)$ са вредностима у интервалу $[a, b]$ такву да је $|f'(x)| \leq q < 1$. Тада је на основу теореме о средњој врености (mean-value theorem):

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2| \leq q|x_1 - x_2|,$$

што због дефиниције метрике на реалној правој значи да је f контракција и да има непокретну тачку x^* за коју је $f(x^*) = x^*$.

Ставимо $f(x) = x - \lambda F(x)$, а параметар λ ћемо одредити накнадно. Дата једначина тада је еквивалентна једначини $f(x) = x$, па из $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$ следи

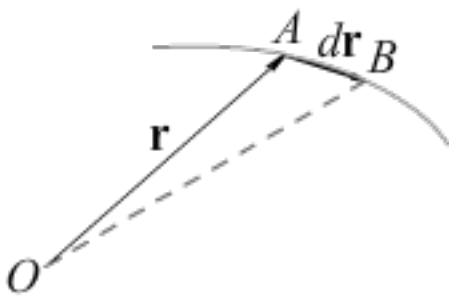
$$1 - \lambda M \leq f'(x) \leq 1 - \lambda m.$$

Могуће је изабрати λ тако да буде испуњено ограничење за $f'(x)$ које оправдава примену Банаховог става. □

Друге важне теоријске примене Банаховог става су у доказу егзистенције решења система $n \in \mathbb{N}$ линеарних алгебарских једначина, затим доказ егзистенције решења бесконачног система линеарних алгебарских једначина, егзистенција локалног решења диференцијалне једначине првог реда и уопште егзистенције јединствености решења диференцијалних једначина које су „довољно регуларне“. Такође езгистенција Фредхолмове интегралне једначине[23]. Ови докази се могу наћи као примери примене Банаховог става у многим уџбеницима функционалне анализе, па их овде не наводим.

2.4 Потенцијал

На слици 2.2 је троугао OAB разапет векторима $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ и $d\mathbf{r} = \overrightarrow{AB}$ који настаје инфинитезималним померањем $d\mathbf{r}$ тела на којег делује (непозната) сила из тачке O.



Slika 2.2: Површина троугла OAB.

Површина троугла OAB је половина интензитета векторског производа вектора који је разапињу (в. [5]), па можемо писати $d\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$. Њен извод по времену даје $d\dot{\Pi} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\dot{\mathbf{r}}$, а други $d\ddot{\Pi} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}})$. Први сабирак десно у загради је нула, јер је

[23] Fredholm integral equation: `https://en.wikipedia.org/wiki/Fredholm_integral_equation`

векторски производ паралелних вектора нула. У другом сабирку вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ је убрзање тела које је пропорционално сили, па има исти правац са $\mathbf{r}$. Зато је и други сабирак нула. Дакле, $\ddot{\Pi} = 0$, а отуда $\dot{\Pi} = \text{const}$. Ако је сила гравитациона, доказали смо *Кеплеров други закон.* Међутим, сила на тој слици може бити и нека друга.

Потез (радијус вектор) од извора силе O до тела A на које сила делује у једнаким временима пребрише једнаке површине ма какве врсте силе. То ће једнако важити за гравитационе, електромагнетне, или друге привлачне или одбојне силе таквог тачкастог извора. Ако је то тачно, онда се Њутнов закон гравитације не може извести из Кеплеровог другог закона, да се свака од планета сунчевог система креће тако да њен радијус вектор положаја у односу на Сунце у једнаким временима пређе преко једнаких површина.

2.4.1 Њутнов закон гравитације

Извешћемо Њутнов закон гравитације из *Кеплеровог трећег закона*, да су квадрати опходних времена планета (T) пропорционални кубовима њихових средњих удаљености од Сунца (r).

Дакле, полазимо од Кеплерове пропорције $T^2/r^3 = \text{const}$. За кружне орбите у општим јединицама она постаје $T^2 = kr^3$, где је орбитални период $T = 2\pi r/v$. Сменом периода у Кеплерову пропорцију добијамо

$$\frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = kr^3,$$

а након уређивања и множења обе стране масом налазимо

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{4\pi^2 m}{kr^2}.$$

Лева страна једнакости је *центрипетална сила* која планету држи у кружном кретању. Мора бити да је гравитација та која држи тело у орбити

$$F = \frac{4\pi^2 m}{kr^2}.$$

Према *Њутновом* трећем закону, сила која планету везује за Сунце једнака је сили којом је Сунце везано за планету. Због ове симетрије, акције и реакције, имамо

$$F = G\frac{Mm}{r^2},$$

где је $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} *гравитациона константа.* Сила је векторска величина па ово пишемо

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{e}_r, \tag{2.39}$$

где су масним (bold) словима писани вектор силе и јединични вектор положаја.

У класичној механици *рад* је пренос енергије, овде W, који се врши деловањем силе ($\mathbf{F}$) дуж пута ($\mathbf{r}$). За гравитационе и електростатичке силе кажемо да су *конзервативне* јер рад који оне остваре зависи само од крајњих тачака, а не од облика пута, па је

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F\,dr\,\cos\varphi, \tag{2.40}$$

где су интензитети вектора $F = |\mathbf{F}|$, $r = \mathbf{r}$, а $\varphi = \angle(\mathbf{F}, \mathbf{r})$ је угао између њих.

2.4.2 Моменти

За разлику од рада силе који је скаларни производ вектора силе и пута, *момент силе* или обртни момент (torque) је вектор интензитета

$$\tau = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = rF \sin\varphi, \tag{2.41}$$

векторског производа вектора пута ($\mathbf{r}$) и силе ($\mathbf{F}$). *Угаони момент* или момент импулса ($\mathbf{L}$) је вектор

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \tag{2.42}$$

то је векторски производ вектора пута и линијског импулса ($\mathbf{p}$).

У ротационој кинематици угаони момент узима место силе линеарне кинематике, јер је формално еквивалентан Њутновом другом закону кретања ($F = ma$) где је

$$\tau = I\alpha. \tag{2.43}$$

Ово α постаје угаоно убрзање, а I ротациона инерција. Што је веће I теже је постићи угаоно убрзање тела. Та инерција објашњава слику 2.2 и константност површина у једнаким временима.

Са друге стране, видимо да угаони момент (2.42) има физичку димензију дејства, да је он производ пута и импулса. На поменутој слици, тело се у пољу силе креће тако да се не мења дејство, сада додајмо нити информација. Знамо да је информација дводимензионална, да је сила та која може мењати вероватноће а тиме и релативну информацију, али приметимо да сила са извором као на датој слици то не чини. Другачије би било када сила у извору (O) не би била константна.

Са становишта саме хомотетије, са порастом r површина троугла OAB расте са r^2, а са истим квадратом расте и површина сфере (полупречника r са центром O). Ова добра синхронизованост одговара преносу информације са извора на тело помоћу *виртуелних сфера* бозона о којима сам писао раније „поправљајући“ представу о *Фајнмановим дијаграмима* усклађујући је са „теоријом информације“.

Амплитуда „виртуелне сфере“ опада са њеном површином а тако опада и њена вероватноћа интеракције са другим набојем. Таласна дужина „сфере“ константна је па је константна и вредност евентуално пренешеног импулса. То су укратко та (моја) усклађивања интеракција Фајнманових дијаграма. Овде даље преузимамо својство „сфере“ да преноси информацију и да је та информација сразмерна површини троугла попут OAB на слици 2.2.

Рачунајући да је површина троугла сразмерна информацији, сразмерна је и дејству, па је она сразмерна импулсу (и путу), односно енергији (и времену). Према томе, површине које радијус вектори пребришу у једнаким временима представљају енергије које из (2.40) израчунавамо интегрирањем

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{2.44}$$

То је енергија дефинисана скаларним множењем вектора и сродна је потенцијалу. Њој су блиски моменти попут (2.42) дефинисани векторским производима вектора. Тако долазимо до потребе за *псеудо-скаларним производом* (pseudoinner product) који ћу објаснити у наставку када се ради комплетности прво подсетимо неколико примера потенцијала.

2.4.3 Потенцијална енергија

Гравитациони потенцијал, овде V, тачке удаљене r масе m обично се дефинише као рад W потребан да се јединица масе m из бесконачности доведе до те тачке:

$$V(r) = \frac{W}{m} = \frac{1}{m}\int_{\infty}^{r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{m}\int_{\infty}^{r} G\frac{Mm}{r^2}\,dr = -G\frac{M}{r}. \tag{2.45}$$

Гравитациона константа је G, а гравитациону силу $\mathbf{F}$ производи маса M. Потенцијал је негативан јер је сила привлачна, што значи да је информација у јачем пољу мања.

Тела теже стању мање информације, али то не значи да у томе и успевају. Због исте инертности, тј. несклоности емисији информације односно промени дејства, тело у гравитационом пољу *слободно пада*. Оно спонтано остаје у *бестежинском стању* тако се крећући да му је збир кинетичке:

$$E_k = \int_0^t \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}\cdot d(m\mathbf{v}) = \int_0^v \left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv^2}{2}, \tag{2.46}$$

и потенцијалне енергије увек константан. Потенцијална енергија је

$$E_p = Fh = mgh, \tag{2.47}$$

где је F сила која би маси m дала убрзање g на путу h.

Потенцијална енергија је енергија коју објект има због свог положаја у односу на неки други објект. На врху степеница имамо више потенцијалне енергије него на дну, јер нас гравитација Земље вуче доле. Она може вршити рад привлачећи нас. Кад држимо два магнета одвојено, они имају више потенцијалне енергије него када су близу. Ако их пустимо, магнети ће се приближавати вршећи рад.

Електрични потенцијал или електрични скаларни потенцијал је потенцијал који одговара електричном пољу. То је је величина присутна у свакој тачки простора и једнака је количнику потенцијалне електричне енергије по јединици наелектрисања која се налази у статичком (временски непромењивом) електричном пољу. Она је скаларна величина чији је негативни *градијент* једнак вектору електричног поља

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi. \tag{2.48}$$

Како је ротор стационарног електричног поља једнак нули, $\nabla\times\mathbf{E} = 0$, овај потенцијал (као и гравитациони) не зависи од путање, овде C, већ само од крајњих тачака

$$\phi = -\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}. \tag{2.49}$$

У случају набоја Q на удаљености r ово постаје *Кулонов*[24] потенцијал

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}, \tag{2.50}$$

где је $\varepsilon_0 \approx 8,854\cdot 10^{-12}$ F m^{-1} *пермеабилност вакуума*.

Уопште, градијент (или градијент векторског поља) скаларне функције $f(\mathbf{x})$ по векторској променљивој $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ означава се са $\operatorname{grad} f$ или *набла* симболом

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right). \tag{2.51}$$

Скаларни производ вектора $\nabla f\cdot\mathbf{v}$ градијента у тачки $\mathbf{x}$ са вектором $\mathbf{v}$ даје извод функције f у тој тачки у правцу датог вектора.

[24] Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806), француски војни инжењер и физичар.

2.4.4 Псеудоскаларни производ

Псеудоскаларни производ ненултих вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ дефинишемо као број

$$c = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}), \tag{2.52}$$

а сматрамо га нулом ако је бар један од фактора нула. Може се наћи у збирци задатака Праслова (в. [13]) са ознаком дисјункције, коју овде мењамо у $c = \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ због каснијег усклађивања (са Фоковим простором). У мојим ранијим радовима (в. [7]) то је *комутатор*[25], а овде користимо обе ознаке.

Знамо да израз (2.52) дефинише површину паралелограма разапетог векторима $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ па можемо писати $\Pi(ABC) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})$. На слици 2.2 кретање је у равни π са површином датог троугла $\Pi(OAB) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{AB})$.

Уопште, три тачке су увек у некој равни π на коју можемо поставити Декартов правоугли систем координата OXY. У њему су дате тачке $A(A_x, A_y, 0)$, $B(c_x, c_y, 0)$ и $C(C_x, C_y, 0)$ које дефинишу векторски производ:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} &= [(c_x - A_x)\vec{i} + (c_y - A_y)\vec{j}]\times[(C_x - A_x)\vec{i} + (C_y - A_y)\vec{j}] = \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ c_x - A_x & c_y - A_y & 0 \\ C_x - A_x & C_y - A_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\begin{vmatrix} c_x - A_x & c_y - A_y \\ C_x - A_x & C_y - A_y \end{vmatrix} \\
&= \vec{k}[(c_x - A_x)(C_y - A_y) - (c_y - A_y)(C_x - A_x)] \\
&= \vec{k}[(A_x c_y - c_x A_y) + (c_x C_y - C_x c_y) + (C_x A_y - A_x C_y)] \\
&= \vec{k}([A,B] + [B,C] + [C,A]),
\end{aligned}$$

где са $[P,Q] = P_x Q_y - Q_x P_y$ означавамо „комутатор“ произвољних тачака P и Q у Декартовом систему OXY, овде у равни π. Према томе

$$\Pi(ABC) = \frac{1}{2}([A,B] + [B,C] + [C,A]) \tag{2.53}$$

је површина троугла ABC.

Приметимо да је $[P,Q] = -[Q,P]$, па за четири тачке у равни имамо површину:

$$\Pi(ABCD) = \frac{1}{2}([A,B] + [B,C] + [C,A]) + \frac{1}{2}([A,C] + [C,D] + [D,A]),$$

па површина четвороугла $ABCD$ писана комутаторима износи

$$\Pi(ABCD) = \frac{1}{2}([A,B] + [B,C] + [C,D] + [D,A]). \tag{2.54}$$

Аналогно за површину произвољног многоугла $A_1A_2\ldots A_n \subset \pi$ добијамо

$$2\Pi(A_1A_2\ldots A_n) = [A_1,A_2] + [A_2,A_3] + \cdots + [A_{n-1},A_n]. \tag{2.55}$$

То је предност методе комутатора за израчунавање површина, овде нарочито згодна јер сила из константног извора покреће тело тако да оно остаје у истој равни.

Када је једно теме троугла ABC у исходишту, рецимо $C = O(0,0)$ као на слици 2.2, онда је површина троугла $\Pi(OAB) = \frac{1}{2}[A,B]$. Дакле, комутатор је двострука површина троугла којом се једна страница види из супротног темена.

[25] Тада нисам знао за збирку Праслова.

2.4.5 Примери множења

Значај псеудоскаларног произовода, а тиме и комутатора сада је већи због теорије информације, па би било добро извући их из нафталина, ако су тамо некада и били. Ево зато неколико занимљивих примера.

Пример 2.4.1. *За произвољне векторе* $\mathbf{a} = (A_x, A_y)$, $\mathbf{b} = (c_x, c_y)$ *и* $\mathbf{c} = (C_x, C_y)$ *у Декартовој равни и произвољан број* λ *доказати да важе релације:*

1. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = A_x c_y - A_y c_x$,
2. $(\lambda \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$,
3. $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$.

Доказ. 1. Нека су $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ јединични вектори апсцисе и ординате. Тада је $\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_x = 1$, $\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_y = 0$, па је $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y) \wedge (c_x \mathbf{e}_x + c_y \mathbf{e}_y) = A_x c_y - c_x A_y$.

2. Ако је $\lambda < 0$, онда $(\lambda \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = -\lambda |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \angle(-\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$. За $\lambda \geq 0$ једнакост је очигледна.

3. Нека је $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$. Нека вектор $\mathbf{a}$ иде у смеру x-осе тако да је $A = (A_x, 0)$, $B = (c_x, c_y)$ и $C = (C_x, C_y)$. Тада је $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = A_x c_y$, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = A_x C_y$, па је $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = A_x(c_y + C_y) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$. □

Пример 2.4.2. *За произвољне тачке* A, B, C *и* D *доказати површине:*

1. $\Pi(ABC) = -\Pi(BAC) = \Pi(BCA)$,
2. $\Pi(ABC) = \Pi(DAB) + \Pi(DBC) + \Pi(DCA)$.

Доказ. 1. Следи из $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.

2. Произилази редом из:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \wedge (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) =$$

$$= \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$$
$$= \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}.$$

□

Пример 2.4.3. *Три тркача* A, B *и* C *трче дуж паралелних стаза константним брзинама. У почетном тренутку површина троугла* ABC *била је 2, а након 5 секунди била је 3. Колика би могла бити након још 5 секунди?*

Решење. У почетном тренутку, $t = 0$, имамо $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$ и $\overrightarrow{AC} = \mathbf{w}$. Затим у тренутку $t > 0$ имамо $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ и $\overrightarrow{AC} = \mathbf{w} + t(\mathbf{c} - \mathbf{a})$, где су $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ вектори брзина тркача A, B и C редом. Како су вектори брзина паралелни биће $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$, па $|\Pi(ABC)| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = |x + ty|$, где су x и y неке константе.

Услови дају систем $|x| = 2$, $|x + 5y| = 3$, па за $t = 10$ добијамо два решења, 4 или 8, за тражене површине. □

Следећи примери били би разна израчунавања кретања планета сунчевог система, затим у другим пољима сила, а онда и нешто слично у теорији информације.

2.4.6 Поопштавање

Метода комутатора на неки начин произилази из познатих некомутативности нарочито линеарних оператора физике, па је природно да је на њу и вратимо. Доследно би било рећи да је кружни производ три комутатора једнак двострукој *површини троугла* којег они формирају, ма шта то значило у смислу класичне геометрије. Погледајмо то на примеру *Паулијевих матрица*:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.56}$$

где за имагинарну јединицу важи $i^2 = -1$. За одговарајућу „површину троугла“ добијамо:

$$2\hat{\Pi}(\hat{\sigma}_x\,\hat{\sigma}_y\,\hat{\sigma}_z) = [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] + [\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z] + [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x] =$$

$$= (\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x) + (\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y) + (\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z)$$

$$= 2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

па је:

$$\hat{\Pi}(\hat{\sigma}_x\,\hat{\sigma}_y\,\hat{\sigma}_z) = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix}, \quad \det\hat{\Pi} = 3. \tag{2.57}$$

Десно је детерминанта матрице $\hat{\Pi}(\hat{\sigma}_x\,\hat{\sigma}_y\,\hat{\sigma}_z)$, површина Паулијевог назовимо троугла.

Слично добијамо за *кватернионе* (в. [6]), овде:

$$\hat{q}_x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{q}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{q}_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{2.58}$$

Сада је двострука „површина троугла“:

$$2\hat{\Pi}(\hat{q}_x\,\hat{q}_y\,\hat{q}_z) = [\hat{q}_x, \hat{q}_y] + [\hat{q}_y, \hat{q}_z] + [\hat{q}_z, \hat{q}_x] =$$

$$= (\hat{q}_x\hat{q}_y - \hat{q}_y\hat{q}_x) + (\hat{q}_y\hat{q}_z - \hat{q}_z\hat{q}_y) + (\hat{q}_z\hat{q}_x - \hat{q}_x\hat{q}_z)$$

$$= 2\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

па је

$$\hat{\Pi}(\hat{q}_x\,\hat{q}_y\,\hat{q}_z) = \begin{pmatrix} -i & -1-i \\ 1-i & -i \end{pmatrix}, \quad \det\hat{\Pi} = 1. \tag{2.59}$$

Детерминанта орјентисане „површине кватерниона“ овог редоследа трећина је Паулијеве, у неком другачијем редоследу обиласка „темена“ била би једнака Паулијевој.

Другачији пример сличног били би линеарни оператори $\hat{A}$ и $\hat{B}$ са *сопственим вектором* $\mathbf{v}$ *комутатора*:

$$[\hat{A}, \hat{B}]\mathbf{v} = (A_x c_y - A_y c_x)\mathbf{v}, \tag{2.60}$$

где је $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. При томе тражимо да важе и следеће релације:

$$\hat{A}\mathbf{u} = A_x\mathbf{v}, \quad \hat{A}\mathbf{v} = A_y\mathbf{u}, \quad \hat{B}\mathbf{u} = c_x\mathbf{v}, \quad \hat{B}\mathbf{v} = c_y\mathbf{u}. \tag{2.61}$$

Ови скалари A_x, A_y, c_x, c_y су (анти)сопствене вредности придружене *анти-сопственим векторима* $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ датих оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Да заиста важи једнакост (2.60) следи из (2.61) редом:

$$[\hat{A}, \hat{B}]\mathbf{v} = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\mathbf{v} = \hat{A}\hat{B}\mathbf{v} - \hat{B}\hat{A}\mathbf{v} = \hat{A}(c_y\mathbf{u}) - \hat{B}(A_y\mathbf{u}) =$$

$$= (\hat{A}\mathbf{u})c_y - (\hat{B}\mathbf{u})A_y = A_x c_y \mathbf{v} - c_x A_y \mathbf{v} = (A_x c_y - c_x A_y)\mathbf{v},$$

што је тачно. Слично, користећи (2.61), проверавамо:

$$[\hat{A}, \hat{B}]\mathbf{u} = -(A_x c_y - A_y c_x)\mathbf{u}, \tag{2.62}$$

због чега и назив „анти-сопствени“ за векторе $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Пример 2.4.4. *Наћи сопствене векторе комутатора Паулијевих матрица (2.56).*

Решење. Израчунавамо сопствене векторе комутатора, редом:

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y]\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, \quad [\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z]\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2, \quad [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x]\mathbf{v}_3 = \lambda_3\mathbf{v}_3,$$

$$2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad 2\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \lambda_3\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$2i\begin{pmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad 2i\begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad 2\begin{pmatrix} y_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \lambda_3\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Ове векторе смо и нормирали. Све три одговарајуће сопствене вредности су међусобно једнаке, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2i$. Приметимо да су горњим редом дати комутатори једнаки кватернионима $-2\hat{k}$, $2\hat{j}$ и $-2\hat{i}$. □

Пример 2.4.5. *Наћи „анти-сопствене“ векторе Паулијевих матрица (2.56).*

Решење. Полазимо од првог комутатора из претходног примера и (2.61), при чему је $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$, $\hat{A} = \hat{\sigma}_x$, $\hat{B} = \hat{\sigma}_y$, а скалари A_x, A_y, c_x, c_y и вектор $\mathbf{u} = \binom{x}{y}$ су непознати:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = A_x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -iy \\ ix \end{pmatrix} = c_x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = c_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_x = 1, \quad A_y = 1, \quad c_x = -i, \quad c_y = i.$$

Заиста, сопствена вредност првог комутатора је $A_x c_y - c_x A_y = 2i$.

За други комутатор ($\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$) слично налазимо:

$$\hat{\sigma}_y\mathbf{u} = A_y\mathbf{v}, \quad \hat{\sigma}_y\mathbf{v} = A_z\mathbf{u}, \quad \hat{\sigma}_z\mathbf{u} = c_y\mathbf{v}, \quad \hat{\sigma}_z\mathbf{v} = c_z\mathbf{u},$$

$$\begin{pmatrix} -iy \\ ix \end{pmatrix} = A_y\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -i \\ i \end{pmatrix} = A_z\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = c_y\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_z\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -i \\ i \end{pmatrix}, \quad A_y = 1, \quad A_z = 1, \quad c_y = -i, \quad c_z = i.$$

Заиста, сопствена вредност другог комутатора је $A_y c_z - c_y A_z = 2i$.

За трећи комутатор ($\mathbf{v} = \mathbf{v}_3$) налазимо:

$$\hat{\sigma}_z \mathbf{u} = A_z \mathbf{v}, \quad \hat{\sigma}_z \mathbf{v} = A_x \mathbf{u}, \quad \hat{\sigma}_x \mathbf{u} = c_z \mathbf{v}, \quad \hat{\sigma}_x \mathbf{v} = c_x \mathbf{u},$$

$$\hat{\sigma}_z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_z \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = A_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_z \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_x \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = c_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = A_z \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = A_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = c_z \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = c_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

а отуда:

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad A_z = 1, \quad A_x = 1, \quad c_z = -i, \quad c_x = i.$$

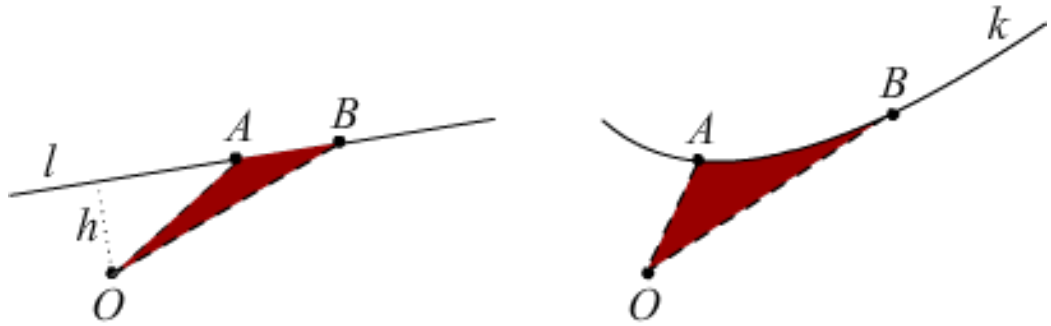
Заиста, сопствена вредност трећег комутатора је $A_z c_x - c_z A_x = 2i$. □

2.4.7 Потенцијал информације

Ако смо разумели шта се мисли под „површином троугла оператора“, онда се можемо вратити на *Кеплеров* други закон да бисмо га повезали са Хајзенберговим *релацијама неодређености* и принципом најмањег дејства. Пођимо од сасвим једноставних примера на следећој слици.

На слици 2.3 лево, видимо тачку O и на удаљености h од ње праву линију l која садржи две тачке A и B. Ако дуж AB померамо (транслирамо) дуж дате праве не мењајући јој дужину, онда се ни површина троугла OAB не мења. То је Кеплеров други закон када у извору O нема силе. Када постоји нека константна сила у извору O на слици 2.3 десно, онда имамо ситуацију коју смо разматрали на слици 2.2, осим што је сада сила одбојна.

Извор је набој, фермион који одашиље виртуелне бозоне у облику концентричних сфера чији полупречници временом расту. Он шаље виртуелне информације простору о најкраћим удаљеностима које нису праве линије, односно да путање најмањег дејства нису више праволинијске за друге честице одговарајућег набоја.



Slika 2.3: Површине троуглова OAB.

Под деловањем силе простор постаје попут криве површи (седласте, површине сфере, или неке треће) за мрава чије праволинијско кретање омета чврста подлога, али коју

мрав још увек прелази „најкраћим путевима“, схватајући то на свој начин. У истој смо ситуацији и ми када прелазимо преко брда најкраћим путем који није пут кроз брдо, ако нема тунела.

Такав ефекат производи сила мењајући вероватноће, чинећи раније праволинијске путање мање вероватним, што значи више информативним, са већим трошењем дејства, које ће физичко тело држећи се принципа најмањег дејства сада избегавати.

Теоријски можемо узимати све краће дужине AB трајекторије k тежећи граничној инфинитезималној са увек истим тврђењем, да потег OA прелазећи на OB у истим временским интервалима дефинише стално једнаке површине, али практично то ће се завршити на реду величине Планкове константе. Ми се на крају враћамо на методу комутатора унитарних оператора квантне механике. На слици 2.3 десно, шрафирана површина OAB и даље је половина вредности комутатора $[A, B]$, али су тачке A и B тада оператори положаја и импулса честице, а комутатор и „константна површина“ реда величине кванта дејства.

Овако генерализовани Кеплеров други закон говори о кретању у пољу где постоји извор константне силе, или изван ње, по принципу најмањег дејства. То је била тема моје претходне књиге „Минимализам информације“ [2] у делу који не бих понављао. Оно што овде наглашавам је кретање због промене потенцијала.

Потенцијална енергија је део дејства (производ енергије и трајања) самог простора. Она је тако део препрека и пролаза за честице које на њу реагују, онога што се у теорији релативности назива *геометрија простора*, а што бисмо овде могли називати простором физичких вероватноћа, или физичких информација.

Тела се крећу по, са њиховог становишта, највероватнијим трајекторијама а то су путање просторних минималних информација. То произилази из општег, начелног минимализма емисије информације. То је начело толико опште да се односи и на сама тела. Она се по том различито информативном простору крећу тако променљивим брзинама да им укупне информације остају константне. Али за разлику од класичне материјалистичке физике, информацијској није својствена комуникација свега са свачим па онда ни униформисаност набоја.

2.5 Комбиноване сопствене вредности

Разматрамо сопствене вредности комутатора и „анти-сопствене“ вредности њихових појединих оператора векторског простора X над телом скалара Φ. Ове због специфичне улоге у комутатору називам и „псеудо-сопственим вредностима“, или *комбиновано-сопственим*. Подразумева са да су оператори линеарни и са уобичајеним ознакама $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \ldots$, за разлику од вектора на које они делују овде у ознакама $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$, осим ако је другачије речено.

Нека су дати линеарни оператори $\hat{A}$, $\hat{B}$ и вектори $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ такви да је:

$$\hat{A}\mathbf{x} = A_y\mathbf{y}, \quad \hat{B}\mathbf{y} = c_x\mathbf{x}, \quad \hat{B}\mathbf{x} = c_y\mathbf{z}, \quad \hat{A}\mathbf{z} = A_x\mathbf{x}, \tag{2.63}$$

где су A_x, c_x, A_y, c_y скалари. Можемо сматрати да су ови вектори јединични, оператори унитарни, а скалари комплексни бројеви, али то за већину навода није битно и изузеци ће бити посебно наглашени. Комутатор оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$ је

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \tag{2.64}$$

па је његова сопствена (карактеристична) једнакост

$$[\hat{A}, \hat{B}]\mathbf{x} = (A_x c_y - A_y c_x)\mathbf{x}, \tag{2.65}$$

што следи из (2.63). У изразу $\hat{T}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ имамо сопствени вектор и одговарајућу сопствену вредност, а више таквих сопствених вредности чине „спектар“ оператора $\hat{T}$.

2.5.1 Спектар оператора

Скалар $\lambda \in \Phi$ називамо карактеристичном, сопственом или *својственом вредношћу* (eigenvalue) оператора $\hat{T} \in (X \to X)$, ако постоји бар један вектор $\mathbf{x} \in X$, $x \neq 0$, тако да је $\hat{T}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Поменути вектор називамо карактеристични, сопствени, или *својствени вектор* (eigenvector) оператора $\hat{T}$, а скуп свих својствених вредности датог оператора називамо *спектром* ознаке $\lambda(\hat{T})$, или $\sigma(\hat{T})$.

Оператори чине векторски простор, тако да у случају коначно димензионалног простора у бесконачном низу степена оператора:

$$\hat{I}, \quad \hat{T}, \quad \hat{T}^2, \quad \hat{T}^3, \quad \ldots, \tag{2.66}$$

има највише природан број $n \in \mathbb{N}$ линеарно независних вектора. То значи да постоји број $m \in \mathbb{N}$ за који можемо писати

$$\hat{T}^m = a_1\hat{T}^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\hat{T} + a_m\hat{I}, \tag{2.67}$$

за неке скаларе $a_1, \ldots, a_m \in \Phi$. Када су степени оператора линеарно независни вектори, онда су коефицијенти a_k једнозначно одређени. Тада је полином

$$p(\lambda) = \lambda^m - a_1\lambda^{m-1} - \cdots - a_{m-1}\lambda - a_m \tag{2.68}$$

једнозначно одређен оператором $\hat{T}$. Сада једнакост (2.67) прима једноставан облик $p(\hat{T}) = 0$, а полином (2.68) називамо *минималним полиномом* датог оператора.

Минималност овог полинома следи из става да су m оператора у низу (2.66) линеарно независни вектори. Наиме, ако би $p(t)$ био полином степена q мањег од m и ако би било $p(\hat{A}) = 0$, онда би вектори $\hat{I}, \hat{A}, \ldots, \hat{A}^q$ били линеарно зависни, што је противречност.

Друго што видимо из (2.67) је једнакост

$$\frac{1}{\alpha_m}(\hat{T}^{m-1} - \alpha_1\hat{T}^{m-2} - \cdots - \alpha_{m-1}\hat{I})\hat{T} = \hat{I}, \tag{2.69}$$

када је $\alpha_m \neq 0$, односно да је

$$\hat{T}^{-1} = \frac{1}{\alpha_m}(\hat{T}^{m-1} - \alpha_1\hat{T}^{m-2} - \cdots - \alpha_{m-1}\hat{I}) \tag{2.70}$$

реципрочан, или *инверзан оператор* оператора $\hat{T}$ који постоји када је $\alpha_m \neq 0$. Да је инверзан оператор комутативан са датим оператором следи из саме ове дефиниције, јер $\hat{T}$ комутира са $\hat{T}^k$. Оператор за који постоји инверзан оператор назива се *регуларан* или инвертибилан, а ако такав не постоји за оператор кажемо да је *сингуларан*.

Основне особине групе $\mathcal{G}$ регуларних оператора очигледне су. Наиме, инверзан инверзном оператору је сам оператор $(\hat{T}^{-1})^{-1} = \hat{T}$, па из $\hat{T} \in \mathcal{G}$ следи $\hat{T}^{-1} \in \mathcal{G}$. Ако су два оператора део те групе онда је то и њихова композиција $\hat{T}_1, \hat{T}_2 \in \mathcal{G} \implies \hat{T}_1 \circ \hat{T}_2 \in \mathcal{G}$, јер је $\hat{T}_2^{-1}\hat{T}_1^{-1}(\hat{T}_1\hat{T}_2) = \hat{T}_2^{-1}(\hat{T}_1^{-1}\hat{T}_1)\hat{T}_2 = \hat{I}$. Са $\hat{T}$ у групи су и све потенције $\hat{T}^k$, за свако $k \in \mathbb{Z}$.

Посебно, *бијекција* (обострано једнозначно пресликавање) групе на групу, $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$, назива се *изоморфизам* ако је $f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$.

Скуп $\mathcal{G}$ свих регуларних оператора коначно димензионалног векторског простора је група. Ако је $\lambda \in \Phi$ нула минималног полинома $p(\lambda)$ оператора $\hat{T}$, онда је $\lambda\hat{I} - \hat{T}$ сингуларан оператор. Скуп решења минималног полинома називамо спектар, другим речима ако је $p(\lambda) = 0$ онда је $\lambda \in \sigma(\hat{T})$. Ако $\lambda \in \Phi$ није нула минималног полинома оператора $\hat{T}$, онда је $\lambda\hat{I} - \hat{T}$ регуларан оператор а инверзна његова вредност назива се *резолвента*

$$R_\lambda = (\lambda\hat{I} - \hat{T})^{-1} = \frac{1}{\mu(\lambda)}(\hat{T}_0\lambda^{m-1} + \hat{T}_1\lambda^{m-2} + \cdots + \hat{T}_{m-2}\lambda + \hat{T}_{m-1}). \tag{2.71}$$

Овде је

$$\hat{T}_k = \hat{T}^k - a_1\hat{T}^{k-1} - \cdots - a_{k-1}\hat{T} - a_k\hat{I}, \quad \hat{T}_0 = \hat{I}, \tag{2.72}$$

за $k = 1, \ldots, m-1$, са ознакама из (2.67). Поред тога, за свако λ је

$$\hat{T}_0\lambda^{m-1} + \hat{T}_1\lambda^{m-2} + \cdots + \hat{T}_{m-2}\lambda + \hat{T}_{m-1} \neq 0. \tag{2.73}$$

То су важни добро познати ставови о којима више можете наћи у уџбеницима линеарне алгебре, на енглеском на пример [12].

Кејли-Хамилтонова теорема, која је можда и најзначајније тврђење ове области линеарне алгебре[26], каже да свака квадратна *матрица* поништава свој карактеристични полином. На пример, матрица

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \tag{2.74}$$

има карактеристични полином

$$p(\lambda) = \det(\lambda\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{A}}) = \det(\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - (-3)(-4) = \lambda^2 - 3\lambda - 10.$$

Спектар ове матрице, $\sigma(\hat{\mathbf{A}})$, чине две сопствене вредности:

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-10)}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases},$$

решења квадратне једначине $\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$.

Овај минимални полином дефинишемо (произвољном) матрицом $\hat{\mathbf{X}}$ типа 2×2 са

$$p(\hat{\mathbf{X}}) = \hat{\mathbf{X}}^2 - 5\hat{\mathbf{X}} - 2\hat{\mathbf{I}}, \tag{2.75}$$

па је:

$$p(\hat{\mathbf{A}}) = \hat{\mathbf{A}}^2 - 3\hat{\mathbf{A}} - 10\hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 10\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \cdot 1 & 10 \cdot 0 \\ 10 \cdot 0 & 10 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 9 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{0}}.$$

Заиста, квадратна матрица (2.74) поништава свој карактеристични полином (2.75).

[26] `https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley%E2%80%93Hamilton_theorem`

Пример 2.5.1. *Наћи карактеристични полином матрице*

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.76}$$

одредити њен спектар и проверити Кејли-Хамилтонову теорему.

Решење. Налазимо карактеристични полином:

$$p(\lambda) = \det(\lambda\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{A}}) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{21}a_{12} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$
$$= \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}\hat{\mathbf{A}} + \det\hat{\mathbf{A}}.$$

Решења одговарајуће квадратне једначине чине спектар дате матрице, а ни провера карактеристичног полинома није тежак задатак. □

Простор унитарних оператора је до изоморфизма једнак одговарајућем простору матрица, а оба *еволуцијама* квантне механике. Као што знамо, *квантна механика* је репрезентација Хилбертове алгебре чији оператори чине векторски простор дуалан ономе на који делују. Сопствени вектори су *квантна стања* (честице), а сопствене вредности које су реални бројеви су *обзервабле* (физички мерљиве величине).

2.5.2 Својствени вектори у корацима

Када је $\lambda \in \Phi$ сопствена, или *својствена вредност* (линеарног) оператора $\hat{T}$, онда скуп вектора $\mathbf{x} \in X$ са својством $\hat{T}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ образује потпростор који зовемо сопствени или *својствени потпростор* датог оператора придружен датој вредности.

Наиме, из $\hat{T}(\alpha'\mathbf{x}' + \alpha''\mathbf{x}'') = \alpha'\hat{T}\mathbf{x}' + \alpha''\hat{T}\mathbf{x}'' = \alpha'\lambda\mathbf{x}' + \alpha''\lambda\mathbf{x}'' = \lambda(\alpha'\mathbf{x}' + \alpha''\mathbf{x}'')$ следи да је сваки вектор који је линеарна комбинација својствених, $\mathbf{x} = \alpha'\mathbf{x}' + \alpha''\mathbf{x}''$, такође својствени вектор истог оператора, $\hat{T}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Деловање оператора $\hat{T}$ у том потпростору своди се на множење вектора скаларом, тада увек својственог вектора (eigenvector) својственом вредношћу (eigenvalue).

У интерпретацији квантне механике, еволуција (оператор $\hat{T}$) преводи својствена квантна стања (вектор $\mathbf{x}$) у слична, рецимо електроне у електроне, атом у атом, док је својствена вредност (скалар λ) обзервабла, попут енергије, положаја, броја честица. Међутим, еволуције могу бити каскадне, у корацима.

У структури комутатора (2.64) је сабирак за који важи $\hat{A}\hat{B}\mathbf{x} = A_x c_x \mathbf{x}$. То је карактеристична једначина облика $\hat{T}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, где је $\hat{T} = \hat{A}\hat{B}$ композиција оператора, а својствена вредност је $\lambda = A_x c_y$. Детаљније писано то је:

$$\hat{A}\hat{B}\mathbf{x} = \hat{A}\hat{B}(\alpha'\mathbf{x}' + \alpha''\mathbf{x}'') = \hat{A}(\alpha'\hat{B}\mathbf{x}' + \alpha''\hat{B}\mathbf{x}'') = \hat{A}(\alpha' B_y'\mathbf{y}' + \alpha'' B_y''\mathbf{y}'') =$$

$$= \hat{A}(\frac{\alpha' B_y'}{c_y}\mathbf{y}' + \frac{\alpha'' B_y''}{c_y}\mathbf{y}'')c_y = \hat{A}(\beta'\mathbf{y}' + \beta''\mathbf{y}'')c_y = \hat{A}\mathbf{y}c_y = A_x c_y \hat{x}.$$

Дакле, имамо композицију својственог пресликавања:

$$\hat{B} : \mathbf{x} \to c_y\mathbf{y}, \quad \hat{A} : \mathbf{y} \to A_x\mathbf{x}, \tag{2.77}$$

где су вектори $\mathbf{x} = \alpha'\mathbf{x}' + \alpha''\mathbf{x}''$ и $\mathbf{y} = \beta'\mathbf{y}' + \beta''\mathbf{y}''$.

На пример, за карактеристични полином $p_\sigma(\lambda) = \det(\lambda\hat{\mathbf{I}} - \hat{\sigma})$ сваке од три Паулијеве матрице (2.56) добијамо

$$p_\sigma(\lambda) = \lambda^2 - 1, \tag{2.78}$$

са спектром реалим бројевима $\lambda_{1,2} = \pm 1$, решењима једначине $p(\lambda) = 0$. Карактеристични полином $p_q(\lambda) = \det(\lambda\hat{\mathbf{I}} - \hat{q})$ сваког од три кватерниона (2.58) је

$$p_q(\lambda) = \lambda^2 + 1, \tag{2.79}$$

са спектром имагинарним бројевима $\lambda_{1,2} = \pm i$. При томе је:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = \hat{q}_z, & \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z = \hat{q}_x, & \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x = \hat{q}_y, \\ \hat{q}_x\hat{q}_y = -i\hat{\sigma}_z, & \hat{q}_y\hat{q}_z = -i\hat{\sigma}_x, & \hat{q}_z\hat{q}_x = -i\hat{\sigma}_y, \end{cases} \tag{2.80}$$

што значи да се Паулијеве матрице могу факторисати у кватернионе, а кватерниони у Паулијеве матрице.

Пример 2.5.2. *Наћи својствене векторе Паулијевих матрица и кватерниона.*

Решење. Решавамо једначине $\hat{\sigma}_k\mathbf{w}_k = \lambda\mathbf{w}_k$, за индексе $k \in \{x, y, z\}$, сваку за две сопствене вредности, $\lambda = \pm 1$, а сопствене векторе нормирамо, $\|\mathbf{w}_k\| = 1$. Добијамо:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, & \mathbf{w}_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, & \mathbf{w}_{z+} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \\ \mathbf{w}_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, & \mathbf{w}_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}, & \mathbf{w}_{z-} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.81}$$

То су сопствени вектори Паулијевих матрица (2.56). Решавамо затим карактеристичну једначину кватерниона $\hat{q}_k\mathbf{w}_k = \lambda\mathbf{w}_k$, за индексе $k \in \{x, y, z\}$, сваку за две сопствене вредности, $\lambda = \pm i$ и сопствене векторе такође нормирамо, $\|\mathbf{w}_k\| = 1$. Добијамо идентичне одговарајуће вредности (2.81). Сопствени вектори кватерниона и Паулијевих матрица једнаки су, али им сопствене вредности нису једнаке. □

Приметимо да последња реченица из решења каже да иста квантна стања (сопствени вектори) не морају бити једнако обзервабилна. То је потврда онога са чиме стално радимо у теорији информације, да су активна и пасивна информација једнаке по количини али не и по особинама.

Сопствена вредност јединичне матрице $\hat{\mathbf{I}}$ је јединица а њен сопствени вектор је сваки вектор. Она као и јединични оператор $\hat{I}$ представљаљу идентичне трансформације, *статус кво* (лат. status quo – стање какво је), квантну еволуцију која ништа не мења. Међутим, квадрат сваке од Паулијевих матрица је јединична матрица:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\mathbf{I}}. \tag{2.82}$$

Исто важи за одговарајуће операторе који чине простор изоморфан матрицама. Отуда, статус кво можемо сматрати каскадном трансформацијом неидентичних, композицијом два пута примењене било које од три Паулијеве, а онда даље, према (2.80), свака Паулијева матрица растављa се на два фактора кватерниона.

Пример 2.5.3. *Раставити Паулијеве матрице на по два фактора кватерниона и представити (2.77), процесе трансформације сопствених вектора.*

Решење. У случају прве Паулијеве матрице $\hat{\sigma}_x = i\hat{q}_y\hat{q}_z$ имамо:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_x\mathbf{w}_{x+} = \hat{q}_y(i\hat{q}_z\mathbf{w}_{x+}) = \hat{q}_y[\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}] = \hat{q}_y\mathbf{w}_{x-} = \mathbf{w}_{x+}, \\ \hat{\sigma}_x\mathbf{w}_{x-} = \hat{q}_y(i\hat{q}_z\mathbf{w}_{x-}) = \hat{q}_y[\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}] = \hat{q}_y\mathbf{w}_{x+} = -\mathbf{w}_{x-}, \end{cases} \tag{2.83}$$

У случају друге Паулијеве матрице $\hat{\sigma}_y = i\hat{q}_z\hat{q}_x$ је:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_y\mathbf{w}_{y+} = \hat{q}_z(i\hat{q}_x\mathbf{w}_{y+}) = \hat{q}_z[\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}] = -\hat{q}_z\mathbf{w}_{y-} = \mathbf{u}_{y+}, \\ \hat{\sigma}_y\mathbf{w}_{y-} = \hat{q}_z(i\hat{q}_x\mathbf{w}_{y-}) = \hat{q}_z[\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}] = -\hat{q}_z\mathbf{w}_{y+} = -\mathbf{w}_{y-}, \end{cases} \tag{2.84}$$

У случају треће Паулијеве матрице $\hat{\sigma}_z = i\hat{q}_x\hat{q}_y$ израчунавамо:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_z\mathbf{w}_{z+} = i\hat{q}_x(\hat{q}_y\mathbf{w}_{z+}) = i\hat{q}_x[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}] = -i\hat{q}_x\mathbf{u}_{z-} = \mathbf{w}_{z+}, \\ \hat{\sigma}_z\mathbf{w}_{z-} = i\hat{q}_x(\hat{q}_y\mathbf{w}_{z-}) = i\hat{q}_x[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}] = i\hat{q}_y\mathbf{w}_{z+} = -\mathbf{w}_{z-}, \end{cases} \tag{2.85}$$

□

Поједина Паулијева матрица (као и кватернион) имају по један својствени вектор (2.81), сваки са својим правцем чинећи једнодимензионалне својствене потпросторе. Када се таква матрица представи са друге две (2.80) онда се композиција пресликавања својственог вектора (2.77) одвија каскадно кроз различите потпросторе. Аналогно, квантна еволуција има своје периодичне фазе које не морају бити све реалне у смислу класичне квантне механике.

2.5.3 Пример линеарних система

Посматрамо систем две линеарне једначине са две непознате

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2 \end{cases}, \tag{2.86}$$

који краће пишемо $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Карактеристични полином ове матрице нашли смо у примеру 2.5.1, где се види да нула и њен траг чине њен спектар, *акко* (чит. ако и само ако) је њена детерминанта нула. Са друге стране, детерминанта није нула акко дати систем једначина има јединствено решење.

То се може користити за даљу дискусију примера 2.5.3. Рецимо да је поред горњег дат и следећи систем једначина

$$\begin{cases} b_{11}z_1 + b_{12}z_2 = x_1 \\ b_{21}z_1 + b_{22}z_2 = x_2 \end{cases}, \tag{2.87}$$

који краће пишемо $\hat{\mathbf{B}}\mathbf{z} = \mathbf{x}$. Композицијом ових система добијамо $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{z} = \mathbf{y}$, а то пишемо матрично $\hat{\mathbf{C}}\mathbf{z} = \mathbf{y}$, или у облику система линеарних једначина

$$\begin{cases} c_{11}z_1 + c_{12}z_2 = x_1 \\ c_{21}z_1 + c_{22}z_2 = x_2 \end{cases}, \tag{2.88}$$

где имамо композицију линеарних пресликавања као производ матрица $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}$. Знамо да је детерминанта производа једнака производу детерминанти, $\det \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} = \det \hat{\mathbf{A}} \det \hat{\mathbf{B}}$, а то сада можемо користити у провери регуларности композиција оваквих система.

На пример, посматрајмо следеће три матрице:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{2.89}$$

Производ прве две је трећа. Детерминанте су $\det \hat{\mathbf{A}} = -10$, $\det \hat{\mathbf{B}} = -3$ и $\det \hat{\mathbf{C}} = 30$. Њихови спектри су скупови $\sigma(\hat{\mathbf{A}}) = \{5, -2\}$, $\sigma(\hat{\mathbf{B}}) = \{3, -1\}$ и $\sigma(\hat{\mathbf{C}}) = \{15, 2\}$, рецимо решења $\lambda_{1,2}$ карактеристичних једначина

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} \hat{\mathbf{M}} + \det \hat{\mathbf{M}} = 0, \tag{2.90}$$

где редом узимамо $\hat{\mathbf{M}} \in \{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}\}$. На основу Виетових формула даље је

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} \hat{\mathbf{M}}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det \hat{\mathbf{M}}, \tag{2.91}$$

што се такође може користити за проверу оваквих резултата, али такође и за цртање једноставне заједничке матрице са истим својственим вредностима.

За дату својствену вредност λ својствени вектор дефинишемо као решење матричне једначине $\hat{\mathbf{M}}\mathbf{m}_\lambda = \lambda \mathbf{m}_\lambda$, па узимамо само јединичне векторе:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{c}_{15} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{a}_{-2} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, & \mathbf{b}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & \mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{85}} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.92}$$

Нема значајних промена ако пређемо на јединичне матрице $\hat{\mathbf{M}} \to \hat{\mathbf{M}}/\det \hat{\mathbf{M}}$.

Пример 2.5.4. *Посматрајмо фазе вектора* $\mathbf{c}_{15}$ *кроз факторе матрице* $\hat{\mathbf{C}}$.

Решење. Израчунавамо кораке:

$$\hat{\mathbf{C}}\mathbf{c}_{15} = 15\mathbf{c}_{15} \longrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{15}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{c}_{15} = 15\mathbf{c}_{15} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{15}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{A}}3\mathbf{b}_3 = 15\mathbf{c}_{15} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{15}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$15\mathbf{a}_5 = 15\mathbf{c}_{15} \longrightarrow \frac{15}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{15}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

У овом каскадном процесу полазни својствени вектор не мења правац. □

Својствени потпростори у овом случају били су једнаки за све три матрице, па аналогно у квантним процесима закључујемо да овакве фазе природу квантног стања не морају мењати. Међутим, следећи пример показује да постоји и друга могућност.

Пример 2.5.5. *Описати фазе трансформације вектора* $\mathbf{c}_2$ *кроз процес* $\hat{\mathbf{C}}$.

Решење. Пишем прегледно:

$$\hat{\mathbf{C}}\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{c}_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{85}} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{85}} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{c}_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{85}} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{85}} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{A}} \frac{1}{\sqrt{85}} \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix} = 2\mathbf{c}_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{85}} \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{85}} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{\sqrt{85}} \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \end{pmatrix} = 2\mathbf{c}_2 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{85}} \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{85}} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

У овом каскадном процесу полазни својствени вектор мења правац. □

Својствени вектор $\mathbf{c}_2$ свој правац $\binom{6}{-7}$ замењује правацем вектора $\binom{-8}{5}$. У аналогији са квантним процесима то је врста промене природе квантног стања. Још драстичнију промену видели смо у примеру 2.5.3, када је једна фаза имагинарна.

2.5.4 Оператори квантне механике

Сваки мерљиви параметар у физичком систему представљен је квантно-механичким *оператором.* Такви оператори настају када природу квантне механике описујемо помоћу таласа (таласних функција), а не дискретних честица, нарочито не оних чија се кретања и динамика своде на детерминиране једначине њутновске физике. Вредности попут координата и компоненти брзине, линијског и обртног момента честица и функције тих величина, некадашње променљиве класичне механике, сада описујемо линеарним операторима[27].

На пример, оператор $\hat{Q} : f \to g$ делује на функцију $f = f(x)$ и трансформише је у неку другу функцију $g = g(x)$. Резултат деловања тог оператора на исту функцију f може бити производ константе (скалара) λ и те функције

$$\hat{Q} : f \to \lambda f, \tag{2.93}$$

када кажемо да је λ *својствена вредност* (eigenvalue), а функција f *својствена функција* (eigenfunction) оператора $\hat{Q}$. Релација $\hat{Q}f = \lambda f$ се назива *својствена једначина.*

Пример својствене једначине је *Шредингерова*[28] временски независна једначина

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x), \tag{2.94}$$

дуж апсцисе (x-осе), где је $\psi(x)$ *таласна функција*, а

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \hat{V} \tag{2.95}$$

линеарни оператор укупне енергије који се назива *хамилтонијан* по Хамилтону[29], $\hbar = h/2\pi = 1,054$ Js је *редукована* Планкова константа, m је маса квантног система (честице), а $\hat{V} = V(x)$ је оператор потенцијала типа (2.93).

[27] ScienceDirect: `https://www.sciencedirect.com/`
[28] Erwin Schrödinger (1887-1961), аустријски физичар.
[29] William Rowan Hamilton (1805-1865), ирски математичар.

Када се Шредингерова временски независна једначина примењује на три просторне димензије (дужину, ширину и висину) у Декартовим правоуглим координатама је

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \tag{2.96}$$

Овде је ∇ *набла* оператор или градијент скаларног поља, $\Delta = \nabla^2$ је *лапласијан*

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \tag{2.97}$$

Лапласов[30] оператор, а $\mathbf{r} = (x, y, z)$ вектор положаја. Тада је израз у загради просторни, временски независан хамилтонијан, са претходном формом (2.94) и сменом $x \to \mathbf{r}$.

Временски зависна просторна Шредингерова једначина је

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t), \tag{2.98}$$

где је $\hat{H}$ просторни хамилтонијан. Она се своди на временски зависну Шредингерову једначину апсцисе сменом $\mathbf{r} \to x$.

Оператор позиције је множење позицијом, дуж апсцисе или просторно, редом:

$$\hat{x} = x, \quad \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}. \tag{2.99}$$

То су формално оператори какав је и потенцијал, или уопште (2.93).

Оператор линијског импулса честице која се креће апсцисом је

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.100}$$

Његов просторни облик је

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla. \tag{2.101}$$

Приметимо да квадрат овог оператора подељен масом представља кинетичку енергију, а када тој енергији додамо потенцијал добијамо хамилтонијан.

Оператор кинетичке енергије је:

$$E_k = \frac{p_x^2}{2m}, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2, \tag{2.102}$$

редом у класичној и квантној физици дуж апсцисе и просторни.

Оператор ротационог импулса је

$$\hat{\mathbf{L}} = -i\hbar(\hat{\mathbf{r}} \times \nabla). \tag{2.103}$$

Укратко, он је векторски производ оператора положаја и линијског импулса. Приметимо да су компоненте овог вектора:

$$\begin{cases} \hat{L}_x = y\hat{p}_z - z\hat{p}_y = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ \hat{L}_y = z\hat{p}_x - x\hat{p}_z = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right). \end{cases} \tag{2.104}$$

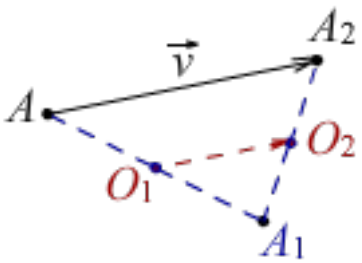
Упоредите то са овде разматраним комутаторима и псеудо-скаларним производима.

[30] Pierre-Simon Laplace (1749-1827), француски математичар.

2.5.5 Ротације

Према *Нетериној теореми*[31], уз сваки *закон одржања* иде нека симетрија која је *изометрија* (чува удаљености), а доследно даље, симетрија се састоји од *ротација*, па проучавање ротација постаје веома важно за квантну механику.

На пример, *огледалска симетрија* је ротација за испружен угао око равни огледала (у новој димензији), *осна симетрија* равни је ротација за испружени угао око осе у простору. *Централна симетрија* је ротација око тачке симетрије за испружен угао у било којој равни праве која садржи оригинал и слику тачке. *Транслацију* за вектор $\vec{v} = 2 \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$ добијамо помоћу две централне симетрије, што се види на слици 2.4.



Slika 2.4: Транслација из две ротације.

Наиме, централном симетријом $s_1 : A \to A_1$ пресликава се тачка A у тачку A_1 око центра O_1 тако да су три тачке на истој правој $A - O_1 - A_1$ и да су удаљености оригинала и копије од центра непромењене $O_1A = O_1A_1$. Аналогно, централном симетријом $s_2 : A_1 \to A_2$ пресликава се тачка A_1 у тачку A_2 око центра O_2. Тако добијамо троугао AA_1A_2 са средњом линијом O_1O_2 која је, као што је познато из геометрије, паралелна основици AA_2 и једнака половини њене дужине. Зато је вектор $\vec{v} = \overrightarrow{AA_2} = 2 \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$, као што је речено.

Ротирајмо сада у Декартовом правоуглом систему OXY тачку $A(x, y)$ око исходишта O за угао $\omega = \angle(AOA')$ у тачку $A'(x', y')$. Двострука површина троугла OAA' једнака је комутатору, а са друге стране она је једнака производу дужина две странице и синуса угла између њих:

$$2\Pi(\Delta OAA') = [A, A'] = xy' - x'y = |OA||OA'| \sin\omega. \tag{2.105}$$

Косинус угла ротације можемо добити из скаларног производа, по дефиницији, затим множећи координате:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = |OA||OA'| \cos\omega = xx' + yy'. \tag{2.106}$$

Како је $|OA| = |OA'|$ и $|OA||OA'| = x^2 + y^2$, то из претходног налазимо:

$$x\cos\omega - y\sin\omega = \frac{x^2x' + xyy'}{x^2 + y^2} - \frac{xyy' - x'y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2x' + x'y^2}{x^2 + y^2} = x',$$

$$x\sin\omega + y\cos\omega = \frac{x^2y' - xx'y}{x^2 + y^2} + \frac{xx'y + y^2y'}{x^2 + y^2} = \frac{x^2y' + y^2y'}{x^2 + y^2} = y'.$$

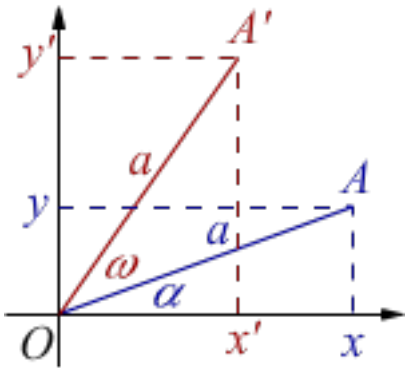
[31] `https://www.mathpages.com/home/kmath564/kmath564.htm`

Отуда

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{2.107}$$

То је трансформација тачке $A(x,y)$ у тачку $A'(x',y')$ ротацијом за угао ω око исходишта система координата OXY. Матрица у овој једначини, типа 2×2 са променљивим углом ω, дефинише групу $SO(2)$.

Формулу (2.107) можемо добити „школски“ сликом 2.5. Тачке $A(x,y)$ и $A'(x',y')$ су у истом систему OXY и формирају једнаке дужине a до исходишта, са углом између $\omega = \angle(AOA')$ и углом апсцисе до ближе $\alpha = \angle(XOA)$.



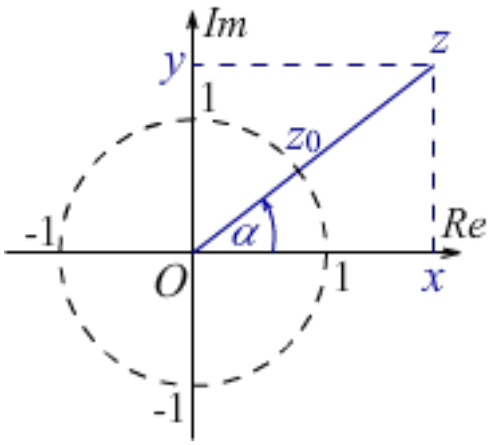
Slika 2.5: Ротација „школски“.

Са слике 2.5 читамо:

$$\begin{cases} x' = a\cos(\alpha+\omega) = a(\cos\alpha\cos\omega - \sin\alpha\sin\omega) = x\cos\omega - y\sin\omega, \\ y' = a\sin(\alpha+\omega) = a(\cos\alpha\sin\omega + \sin\alpha\cos\omega) = x\sin\omega + y\cos\omega, \end{cases} \tag{2.108}$$

а то се своди на претходно.

На следећој слици 2.6 је раван комплексних бројева $z = x + iy$, где је квадрат имагинарне јединице $i^2 = -1$. Тачка z има координате (x,y) са пројекцијама на апсцису и ординату редом $\Re(z) = x$ и $\Im(z) = y$, реалним и имагинарним делом. *Модуо* је дужина $|z| = Oz = \sqrt{x^2+y^2}$, а *аргумент* орјентисани угао од апсцисе до броја, $\alpha = \angle(xOz)$.



Slika 2.6: Раван комплексних бројева $\mathbb{C}$.

Коњугован комплексном броју $z = x + iy$ је комплексан број $z^* = x - iy$. Њихов производ је реалан број $z^*z = x^2 + y^2 = |z|^2$, па је $z_0^* z_0 = 1$. Из правоуглих троуглова даље налазимо $x = |z|\cos\alpha$ и $y = |z|\sin\alpha$ и формирамо

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha). \tag{2.109}$$

Та форма даје посебан значај тачкама на (испрекидано цртаној) кружници јединичног полупречника са центром у исходишту. На слици 2.6 таква је тачка $z_0 = \operatorname{cis}\alpha$

$$\operatorname{cis}\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha, \tag{2.110}$$

јер је њен модуо $|z_0| = 1$. Производ тог јединичног комплексног броја и произвољног комплексног броја

$$w = u + iv = |w|(\cos\beta + i\sin\beta) \tag{2.111}$$

повећава аргумент броја w за α:

$$w' = u' + iv' = |w|(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$

$$= |w|[(\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha) + i(\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha)]$$

$$= |w|[\cos(\beta + \alpha) + i\sin(\beta + \alpha)],$$

а то је ротација. Множењем комплексног броја аргумента β комплексним бројем аргумента α добија се комплексни број аргумента $\beta + \alpha$ и модула једнаког производу модула та два броја

$$w \cdot z = |w|(\cos\beta + i\sin\beta) \cdot |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |w||z|[\cos(\beta + \alpha) + i\sin(\beta + \alpha)]. \tag{2.112}$$

Множење јединичним комплексним бројем ($\operatorname{cis}\omega$) еквивалентно је множењу матрицом (2.107) групе $SO(2)$.

Група $SO(2)$ (енг. special orthogonal group) је посебан, дводимензионални случај *специјалне ортогоналне групе* $SO(n)$ коју чине *ортогоналне матрице*, оне чије су детерминанте један. Та група која се такође назива *ротациона група*, јер поопштава ротације у простору димензије $n = 2$ или $n = 3$, данас се веома проучава.

Уопште ортогонална група $O(n)$ димензије n, коју понекад називамо *генерална ортогонална група* у аналогији са „генералном линеарном групом“ $GL(n)$, је група *изометрија* (трансформација која чува растојање) еуклидског простора димензије n и има фиксну тачку, где је операција групе композиција трансформација. Ортогонална матрица има реалне коефицијенте, а њена *инверзна* (множена матрицом даје јединичну матрицу) једнака је њеној *транспонованој* (матрица чије су колоне замењене врстама, врсте колонама). Ортогонална група је алгебарска група и *Лијева група* – организована са непрекидним и глатким елементима, насупрот дискретној групи.

Специјална унитарна група $SU(n)$ степена n, је Лијева група унитарних матрица $n{\times}n$ детерминанте један. У општијем случају унитарне матрице могу имати комплексну детерминанту апсолутне вредности један. Групна операција је матрично множење. Специјална унитарна група је подгрупа *унитарне групе* $U(n)$ коју чине све $n \times n$ матрице, а ова је подгрупа генералне линеарне групе $GL(n)$. Група $SU(n)$ има широку примену у *стандардном моделу* честица физике, посебно $SU(2)$ у *електрослабим* интеракцијама и $SU(3)$ у квантној *хромодинамици*.

Међутим, овде нећемо ићи даље од резултата мог прилога [8], рецимо од израза произвољне матрице 2×2 помоћу Паулијевих матрица, односно кватерниона:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2}\hat{\mathbf{I}} + \frac{a_{12}+a_{21}}{2}\hat{\sigma}_x + i\frac{a_{12}-a_{21}}{2}\hat{\sigma}_y + \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\hat{\sigma}_z, \tag{2.113}$$

где је $\hat{\mathbf{I}}$ одговарајућа јединична матрица Паулијевим (2.56). Лако добијамо и

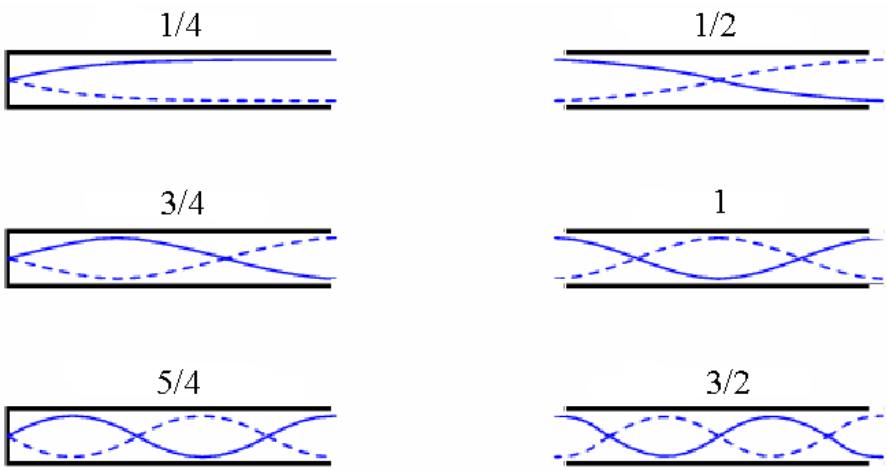
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2}\hat{\mathbf{I}} - i\frac{a_{12}+a_{21}}{2}\hat{q}_x + \frac{a_{12}-a_{21}}{2}\hat{q}_y - i\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\hat{q}_z, \tag{2.114}$$

за кватернионе (2.58).

2.6 Примери сопствених вредности

У проблемима физике задатим помоћу парцијалних диференцијалних једначина, сопствене вредности обично тражимо помоћу граничних услова. Модел таквих су *таласи звука* кроз цеви ваздушних музичких инструмената.

Флаута је једна цев чију активну дужину мењамо отварањем и затварањем рупа. Ефективна дужина тромбона мења се клизањем цеви унутра или ван. У оргуљама се користе цеви различитих фиксних дужина, свака са другачијом основном фреквенцијом. У сваком од оваквих примера звук који цев производи одређује њена дужина L.



Slika 2.7: Број таласа на дужини L цеви.

На слици 2.7 су цеви отворене са једне и са обе стране. Једна *таласна дужина* λ је једна периода синусоиде и видимо је само на средњој слици десно. То су отворене цеви за које, десно, изнад и испод поменуте је редом $L = \frac{1}{2}\lambda$ и $L = \frac{3}{2}\lambda$. На сликама лево су полуотворене цеви и одозго на доле је $L = \frac{1}{4}\lambda$, $L = \frac{3}{4}\lambda$ и $L = \frac{5}{4}\lambda$.

Ове и сличне облике притисака добијамо решавајући *таласну једначину* која описује звук дуж апсцисе

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0, \tag{2.115}$$

где је P *акустички притисак* (локално одступање од околног притиска), а $v = \lambda f$ је *брзина звука* (у ваздуху при нормалним условима око 340 метара у секунди), $f = 1/T$

је *фреквенција*, а T период. Уз претпоставку да је брзина звука константна, опште решење је

$$P = P_1(vt - x) + P_2(vt + x), \tag{2.116}$$

где су P_1 и P_2 два пута диференцијабилне функције. Решење можемо разумети као *суперпозицију* два таласа произвољног профила, првог који путује у смеру x-осе и другог у супротном смеру, оба брзином v. Поједина решења су синусоиде

$$P = P_0 \sin(\omega t \pm kx), \tag{2.117}$$

где је P_0 нека константа, $\omega = 2\pi f$ кружна фреквенција, а $k = 2\pi/\lambda$ је таласни број.

2.6.1 Стојећи таласи

Посматрајмо даље само таласе који се не крећу, *стојеће таласе* у цеви отвореној са обе стране. На границама цеви $x = 0$ и $x = L$ је нормални атмосферски притисак, нема његове промене и развијајући синус збира (разлике) према адиционим формулама функција попут (2.117) налазимо

$$P(x,t) = \psi(x)\cos(\omega t + \phi_0), \tag{2.118}$$

где је ϕ_0 нека константа, фазни помак, а $\psi(x)$ функција која не зависи од времена. Једначина (2.115) тако постаје стационарна таласна једначина

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2\psi = 0, \quad k = \frac{\omega}{v}, \tag{2.119}$$

где би k могао бити и таласни вектор.

Ово је типичан пример *карактеристичне једначине*. Опште решење овог проблема својствених вредности, као што знамо, је

$$\psi(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx), \tag{2.120}$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе. Како $\cos(kx)$ не задовољава гранични услов, да у тачки $x = 0$ нема промене притиска, то се опште решење (2.119) са датим граничним условима своди на

$$\psi(x) = C\sin(kx), \tag{2.121}$$

са произвољном константом C. Оно описује стојећи талас. Други почетни услов, када $x = L$ тада $\sin(kL) = 0$, даје детаљније сопствене вредности таласног вектора

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.122}$$

а отуда таласне дужине

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.123}$$

где у случају $n = 1$ имамо *основни талас*, а за $n = 2, 3, \ldots$ имамо *хармонике* или више тонове. Одговарајуће фреквенције су

$$f_n = \frac{nv}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.124}$$

јер је $f = \omega/(2\pi) = v/\lambda$.

Према томе, опште решење таласне једначине (2.118) за промене акустичног притиска унутар цеви отворене на обе стране је суперпозиција свих ових решења

$$P(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t + \phi_n), \quad k_n = \frac{\omega_n}{v} = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.125}$$

где су коефицијенти C_n и фазни помаци ϕ_n произвољни. Слично решење имају и цеви затворене са оба краја (флауте), а мало су другачија решења полуотворених цеви.

Својствене функције које одговарају различитим сопственим вредностима су узајамно *ортогоналне*, јер је

$$\int_0^L \sin(k_m x)\sin(k_n x)\,dx = \frac{L}{2}\delta_{mn}. \tag{2.126}$$

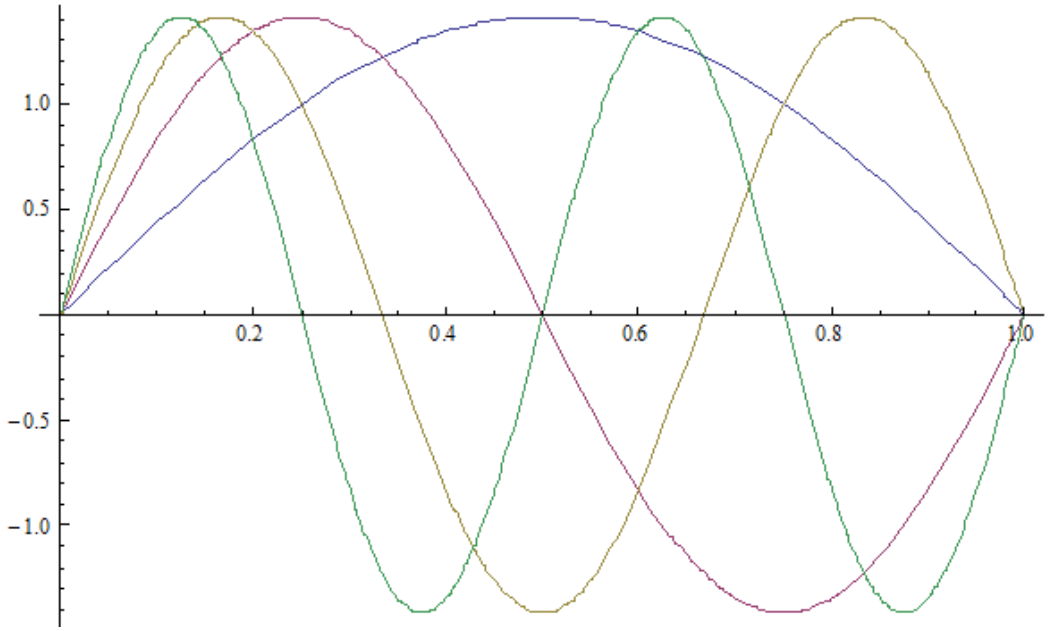
Нормиране својствене функције су

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x), \tag{2.127}$$

наравно, са претходним својством ортогоналности

$$\int_0^L \psi_m(x)\psi_n\,dx = \delta_{mn}, \tag{2.128}$$

где је $\delta_{mn} = 1$ када је $m = n$, а $\delta_{mn} = 0$ када $m \neq n$.



Slika 2.8: Стојећи таласи цеви $L = 1$, за $n = 1, 2, 3, 4$.

Просторна формулација овог проблема је

$$\Delta\psi(\vec{r}) = \lambda\psi(\vec{r}), \tag{2.129}$$

где је Δ лапласијан (2.97), а $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ вектор положаја. Пример је Шредингерова једначина (2.98).

2.6.2 Честица у кутији

Израчунавање таласа честице која се креће дуж неког интервала апсцисе из којег не може изаћи је основни школски задатак квантне механике. Решења тог проблема су могуће вредности њене енергије E и таласне функције $\psi(x)$ чији квадрати интензитета представљају вероватноће положаја честице на месту x са датом енергијом.

Овај задатак решавамо у четири корака. Дефинишемо потенцијалну енергију V, решавамо Шредингерову једначину, тражимо решење за таласну функцију, а на крају и за дозвољене енергије.

Кутија је интервал $0 < x < L$ унутар којег је потенцијал $V = 0$ и који расте до бесконачности на крајевима ($V = \infty$ за $x < 0$ или $x > L$). Временски независна Шредингерова једначина је

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \tag{2.130}$$

где је $\hbar$ редукована Планкова константа, m је маса честице, $\psi(x)$ стационарна временски независна таласна функција, $V(x)$ потенцијална енергија као функција положаја, E енергија, реалан број.

Приметимо да се овај случај лако своди на кретање слободне честице дуж x-осе са нултим потенцијалом енергије ($V = 0$ свугде) са једначином

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \tag{2.131}$$

са општим решењем (2.120). Гранични услови и диференцирање опет дају:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= C\sin(kx),\\
\frac{d\psi}{dx} &= kC\cos(kx),\\
\frac{d^2\psi}{dx^2} &= -k^2C\sin(kx),\\
\frac{d^2\psi}{dx^2} &= -k^2\psi,
\end{aligned}$$

као што смо већ видели у случају отворене ваздушне цеви са звуком.

У складу са Шредингеровом једначином, таласни број сада је

$$k = \left(\frac{8\pi^2 mE}{h^2}\right)^{1/2}, \tag{2.132}$$

где је $h = 6,626 \times 10^{-34}$ Js *Планкова константа*, па је таласна функција

$$\psi(x) = C\sin\left(\frac{8\pi^2 mE}{h^2}\right)^{1/2} x, \tag{2.133}$$

где требамо наћи вредност константе C.

Гранични услови кажу да је вероватноћа налажења честице на местима $x = 0$ и $x = L$ нула. Када је $x = L$ биће:

$$C\sin\left(\frac{8\pi^2 mE}{h^2}\right)^{1/2} L = 0,$$

$$\left(\frac{8\pi^2 mE}{h^2}\right)^{1/2} L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

а отуда

$$\psi(x) = C \sin \frac{n\pi}{L} x, \tag{2.134}$$

што је у складу са (2.122).

Константа C даће услов нормирања вероватноће, да је вероватноћа честице у кутији један, односно да она није негде изван кутије:

$$\int_0^L \psi^2 \, dx = 1,$$

$$C^2 \int_0^L \sin^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right) x \, dx = 1,$$

$$C = \sqrt{\frac{2}{L}},$$

а отуда

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.135}$$

што се слаже са (2.127).

Уврштавајући ово у Шредингерову једначину (2.131) налазимо дозвољене енергије честице у кутији

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8\pi L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.136}$$

што значи да су њене енергије квантоване, те да најмања могућа енергија честице није нула. Честица никада не може бити у потпуном мировању, она увек мора имати неку кинетичку енергију, што је такође у складу са Хајзенберговим релацијама и *принципом неодређености.*

Питаћете се где су овде комплексни бројеви? Они су „прославили“ прорачуне квантне механике, па зато демонстрирам исти проблем *честице у кутији* на још један начин.

Опште решење једначине (2.131) заправо је

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \tag{2.137}$$

где су A и B произвољне константе, а $k = \pm\sqrt{2mE}/\hbar$ је таласни број. Како је

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha = \operatorname{cis}\alpha,$$

функција (2.110), то је:

$$\psi(x) = A[\cos(kx) + i\sin(kx)] + B[\cos(kx) - i\sin(kx)] =$$

$$= (A + B)\cos(kx) + i(A - B)\sin(kx),$$

па стављајући $A + B = C_2$ и $A - B = -iC_1$ добијамо (2.120).

Ово су добро познате смене у решавању диференцијалних једначина, али сада имамо прилику да приметимо њихову везу са Хајзенберговим релацијама неодређености, са

дејством и информацијом на начин како их ја третирам, односно са логаритмом вероватноће који је тако генералисана информација ($I = -\log p$). Управо зато што квантна механика ради са комплексним бројевима, када су логаритми периодичне функције, њене честице су уједно и таласи, оне имају вероватносну таласну природу.

Детаљнија решавања „честице у кутији“ налазе се у књигама Квантне механике, мојој [4] или некој сличној. Тамо где се Шредингерова једначина посебно решава за тзв. потенцијални степеник, потенцијални и високи праг, потенцијалну и дубоку јаму, затим потенцијални бунар, па и даље за разна продирања честице кроз препреке, све различите случајеве граничних услова. Један од тих случајева је тунел ефекат који ћу овде објаснити укратко.

2.6.3 Тунел ефекат

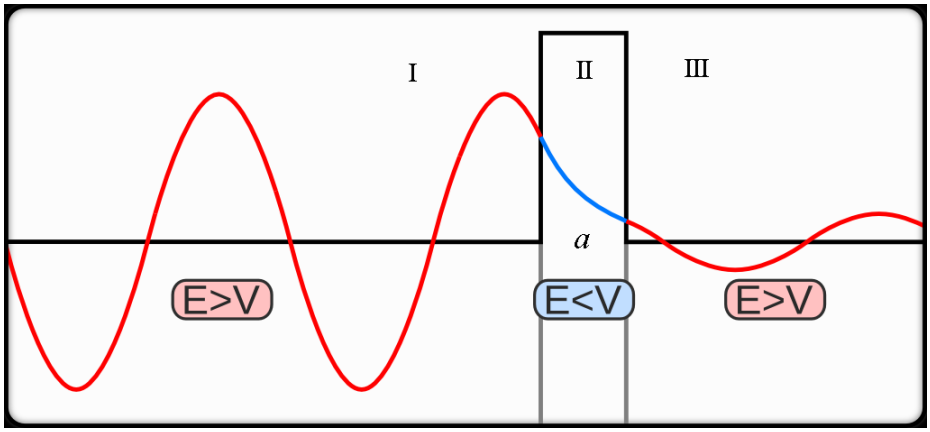
Тунеловање, тунелинг или *тунел ефекат* у физици је продирање честица кроз препреке високе енергије. Према класичној физици то би било немогуће, али не и у квантној.

Тунел ефекат је први опазио Роберт Вилијамс Вуд 1897. године као продор електрона, али га није успео протумачити. Истраживачи радиоактивних распада (1899) изразили су могућност да до распада долази због тунел ефекта, али га је теоријски описао тек Џорџ Гамов (1929) након открића Радерфорда и сарадника да је алфа честица заправо језгро хелијума. Данас се откриће тунел ефекта ипак приписује Фридриху Хунду који га је (1926-27) разматрао при мерењу изомерије код молекула.

Када честица масе m и енергије E наиђе на препреку енергије V, ако је $E < V$ она је према класичној физици не може прећи, јер би њена кинетичка енергија E_k тада била негативна а импулс p имагинарна величина

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = E - V. \tag{2.138}$$

У квантној механици у којој се из Шредингерове једначине израчунавају вероватноће налажења честице иза препреке, овакав пролаз је могућ са истом енергијом E честице након продирања али мањом вероватноћом њеног налажења.



Slika 2.9: Тунелинг дуж апсцисе.

То видимо на слици 2.9 (Wikipedia, Quantum tunnelling) честице која се простире дуж апсцисе (x-осе) са амплитудама на ординати (y-оса). Таласне дужине говоре о

енергији честице, а амплитуде о вероватноћи њеног налажења на датом месту. Опет решавамо 1-Д Шредингерову једначину са сталним потенцијалом

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0, \tag{2.139}$$

чије је опште решење

$$\psi = A\exp[i\frac{x}{\hbar}\sqrt{2m(E-V)}] + B\exp[-i\frac{x}{\hbar}\sqrt{2m(E-V)}]. \tag{2.140}$$

Три су области честице на слици: пре препреке I, на препреци II, и иза препреке III. У првој и трећој области потенцијална енергија је нулта $V = 0$ и тада је енергија честице већа од потенцијалне ($E > 0$), али је у другој области потенцијална енергија већа од енергије честице ($E < V$). Зато разликујемо три решења:

$$\begin{cases} \psi_1 = A_1\exp(ikx) + c_1\exp(-ikx), & x \in I, \\ \psi_2 = A_2\exp(-\chi x) + c_2\exp(\chi x), & x \in II, \\ \psi_3 = A_3\exp[ik(x-a)] + c_3\exp[-ik(x-a)], & x \in III, \end{cases} \tag{2.141}$$

где се узима да је препрека ширине $a > 0$. Поред тога, $c_3 = 0$, јер тај члан описује одбијени талас који се креће из бесконачности назад, а који овде не постоји.

У квантној механици, густина вероватноће честица масе m у квантном стању $\psi(\mathbf{r}, t)$ дефинише се са

$$\rho = \psi^*\psi = |\psi|^2, \tag{2.142}$$

па вероватноћа P налажења честице у инфинитезималном запреминском елементу $d^3\mathbf{r}$ износи

$$dP = |\psi|^2 d^3\mathbf{r}. \tag{2.143}$$

Број честица, вектор који прође окомито кроз јединичну површину у јединици времена, назива се *флукс вероватноће* и износи

$$\mathbf{J} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi), \tag{2.144}$$

а он се назива и „струја вероватноће“, или „густина струје“, или „вероватноћа густине флукса“. У нашем случају флукс вероватноће је скалар

$$J = \frac{i\hbar}{2m}(\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x}\psi^*). \tag{2.145}$$

Коефицијент пропусности препреке D је однос густине тока честица које су прошле и густине тока оних које су дошле.

Узимамо да је χa довољно велико, па израчунавамо:

$$A_2 = \frac{1-in}{2}A_3\exp(\chi a), \quad c_2 = \frac{1+in}{2}A_3\exp(-\chi a) \approx 0,$$

$$A_1 = \frac{(1-in)(1+i/n)}{4}A_3\exp(\chi a),$$

у употреби су и смене:

$$n = \frac{k}{\chi} = \sqrt{\frac{E}{V-E}}, \quad D_0 = \frac{16n^2}{(1+n^2)^2}.$$

Тако се долази до коефицијента пропусности препреке

$$D \approx D_0 \exp\left[-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V-E)}\right], \tag{2.146}$$

Према томе је $D > 0$. То значи да постоји нека мала али ипак позитивна вероватноћа налажења честице иза баријере, у трећој области, чак и када је енергија честице мања од енергије препреке.

Овде је приказана само једна ситуација тунел ефекта. Она је можда једноставнија и зато популарнија, а нека другачија израчунавања са класичним освртом на релације неодређености можете наћи и у мојој поменутој књизи [4]. Овде ћу додати само то да егзистенција тунел ефекта показује да случајности и неизвесности микросвета нису резултат нашег „непознавања свих услова и необавештености", како би *Лаплас* рекао за вероватноћу, него објективне случајности.

2.6.4 Матрична форма

Матричну репрезентацију пишемо уобичајеним ознакама у квантној физици. Нека је линеарни оператор $\hat{A}$ одређен једнакошћу

$$\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle \tag{2.147}$$

за неке векторе $|\phi\rangle$ и $|\psi\rangle$. Затим имамо:

$$|\phi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle = \hat{A}\sum_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|\psi\rangle = \sum_k \hat{A}|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|\psi\rangle,$$

$$\langle\varphi_j|\phi\rangle = \sum_k \langle\varphi_j|\hat{A}|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|\psi\rangle,$$

што пишемо

$$\phi_j = \sum_k a_{jk}\psi_k, \tag{2.148}$$

где су $a_{jk} = \langle\varphi_j|\hat{A}|\varphi_k\rangle$ и $\psi_k = \langle\varphi_k|\phi\rangle$ скалари. Једначина (2.147) еквивалентна (једнака до изоморфизма) је са

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \dots\\ \psi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \dots\\ \phi_n\end{pmatrix}, \tag{2.149}$$

где може бити и $n \to \infty$. Вредности a_{ij} су *матрични елементи*, коефицијенти оператора $\hat{A}$ у односу на базу $\{|\varphi_j\rangle; j = 1, 2, \dots, n\}$.

Размотримо ово на примеру квантно механичког *осцилатора*. *Хамилтонијан* слободне честице је

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\hat{x}^2 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \tag{2.150}$$

где је m маса честице, k константа, $\omega = \sqrt{k/m}$ угаона фреквенција осцилатора, а оператори импулса и положаја су $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ и $\hat{x}$ (множење са x). Први сабирак је кинетичка енергија, други је потенцијална.

Прво употребимо временски независну Шредингерову једначину

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \tag{2.151}$$

где је E својствена вредност енергије, а $|\psi\rangle$ својствено енергетско стање. Ова диференцијална једначина за својствени проблем у координатној бази, за таласну функцију $\langle\chi|\psi\rangle = \psi(x)$, може се решити *спектралном методом*[32]. Решења су добро позната

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \cdot \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \cdot e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \cdot H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.152}$$

где су

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-z^2}\right) \tag{2.153}$$

Хермитови полиноми. Одговарајући нивои енергије су

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = (2n+1)\frac{\hbar}{2}\omega. \tag{2.154}$$

Као што видимо, енергије хармонијског осцилатора су квантоване, што значи да су могуће само дискретне вредности (цели број половина броја $\hbar\omega$), што је иначе општа карактеристика квантно-механичких система за честице у ограничењима.

Дискретни нивои су подједнако распоређени (за разлику од Боровог модела атома), а најнижа енергија (нултог, основног стања) није једнака минимуму потенцијалне јаме него је за $\hbar\omega/2$ изнад. Због те *енергије нулте тачке*, положај и момент осцилатора у основном стању нису фиксни (као што би то било у класичном осцилатору), већ имају мали опсег одступања, у складу са Хајзенберговим принципом неодређености.

Затим пређимо на матрице позиције и импулса, функција $\hat{\mathbf{X}}(t)$ и $\hat{\mathbf{P}}(t)$, које су синусоидалне. Опет је енергија осцилатора

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{P}}^2 + \hat{\mathbf{X}}^2), \tag{2.155}$$

што је Хајзенбергов (матрични) еквивалнент Шредингеровом (2.150). Нивои енергије су у орбитама фазног простора. Класична орбита са енергијом E је

$$X(t) = \sqrt{2E}\cos t, \quad P(t) = -\sqrt{2E}\sin t. \tag{2.156}$$

Квантовање захтева да интеграл од $P\,dX$ по орбити, кружне површине фазног простора, мора бити целобројни производ Планкове константе. Површина круга полупречника $\sqrt{2E}$ је $2\pi E$, а отуда

$$E = \frac{nh}{2\pi}, \tag{2.157}$$

па је у *природним јединицама* (дефинисаним универзалним физичким константама), са $\hbar = 1$, енергија цели број.

Фуријеове[33] компоненте позиције и импулса су једноставне, али је са њима још лакше радити када су у изразима:

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{X}}(t) + i\hat{\mathbf{P}}(t) = \sqrt{2E}e^{-it}, \quad \hat{\mathbf{A}}^* = \hat{\mathbf{X}}(t) - i\hat{\mathbf{P}} = \sqrt{2E}e^{it}. \tag{2.158}$$

Оба оператора, матрица $\hat{\mathbf{A}}$ и коњугована $\hat{\mathbf{A}}^\dagger$ имају само просте фреквенције, а матрице позиције ($\hat{\mathbf{X}}$) и импулса ($\hat{\mathbf{P}}$) добијамо сабирањем и одузимањем њих.

[32] Spectral method: `http://www.scholarpedia.org/article/Spectral_methods`

[33] Joseph Fourier (1768-1830), француски математичар и физичар.

Како се $\hat{\mathbf{A}}$ развија у класични Фуријеов ред[34] са само најнижом фреквенцијом, а њен матрични елеменат a_{jk} је $j-k$-ти Фуријеов коефицијент класичне орбите, матрица за $\hat{A}$ није нула само дуж споредне дијагонале где узима вредности $\sqrt{2E_n}$. Матрица оператора $\hat{A}^*$ је такође ненулта само на споредној дијагонали, са истим елементима. Реконструкцијом налазимо

$$2\hat{\mathbf{X}}(0) = \sqrt{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix} \tag{2.159}$$

и

$$2\hat{\mathbf{P}}(0) = \sqrt{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ i\sqrt{1} & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{3} & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix}. \tag{2.160}$$

То су *Хајзенбергове матрице* за хармонијски осцилатор. Оне су хермитске, јер су добијене из реалних Фуријеових коефицијената.

Израчунавање коефицијената ових матрица за неки даљи тренутак t једноставно је, јер оне просто еволуирају временом

$$x_{jk}(t) = x_{jk}(0)e^{i(E_j-E_k)t}, \quad p_{jk}(t) = p_{jk}(0)e^{i(E_j-E_k)t}. \tag{2.161}$$

Производ матрица позиције и импулса није хермитска матрица, али има реални и имагинарни део. Реални део је половина *антикомутатора* $\{\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{P}}\} = \hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{X}}$, а имагинарни је пропорционалан *комутатору* $[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{P}}] = \hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{X}}$. Лако је проверити да је овај комутатор, у случају хармонијског осцилатора, једнак $i\hbar$, множен јединичном матрицом (оператором). Такође је лако проверити да је полазна матрица (2.155) дијагонална, са својственим вредностима E_n, нивоима енергије.

2.6.5 Лествични оператори

Постоје две врсте *лествичних оператора* (ladder operators), оператори подизања (creation) и спуштања (annihilation). Ови оператори повећавају или смањују сопствене вредности других оператора. Користимо их за промену квантних бројева угаоног момента и за промену енергетских нивоа квантног хармонијског осцилатора.

Узмимо да за операторе $\hat{X}$, $\hat{Y}$ и комутатор $[\hat{X}, \hat{Y}] = \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X}$ важе једнакости:

$$\hat{X}\vec{x} = x\vec{x}, \quad [\hat{X}, \hat{Y}] = y\hat{Y}, \tag{2.162}$$

где је $\vec{x}$ својствени вектор првог, а x и y су скалари. Тада је:

$$\hat{X}\hat{Y}\vec{x} = (\hat{Y}\hat{X} + [\hat{X}, \hat{Y}])\vec{x} = \hat{Y}\hat{X}\vec{x} + [\hat{X}, \hat{Y}]\vec{x} = x\hat{Y}\vec{x} + y\hat{Y}\vec{x} = (x+y)\hat{Y}\vec{x},$$

односно

$$\hat{X}\vec{y} = (x+y)\vec{y}. \tag{2.163}$$

Сопствена вредност (x) првог оператора ($\hat{X}$) промењена за y, при чему је својствени вектор (уместо $\vec{x}$) постао $\vec{y} = \hat{Y}\vec{x}$. Када је y позитиван број тада је $\hat{Y}$ *оператор подизања* или „креације“, а ако је y негативан број онда $\hat{Y}$ ради *анхилацију* или „спуштање“.

[34] Fourier Series: `https://www.math24.net/fourier-series-definition-typical-examples/`

Пример 1. Лествичне операторе можемо конструисати помоћу *Паулијевих матрица* (2.56), прво стављајући:

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.164}$$

а затим:

$$\hat{S}^+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}^- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.165}$$

То су оператори *спина*, при чему је $\hat{S}^+$ оператор подизања и $\hat{S}^-$ спуштања.

Оператори $\hat{S}^+$ и $\hat{S}^-$ нису хермитски, јер се промене узастопним транспоновањем и коњуговањем. Према томе, они не представљају непосредно физичке вредности, али поједностављују математичке изразе и корисни су за тумачење процеса.

Лако је проверити да је:

$$[\hat{S}_z, \hat{S}^+] = \hat{S}^+, \quad [\hat{S}_z, \hat{S}^-] = -\hat{S}^-, \tag{2.166}$$

и на начин (2.163) за оператор $\hat{S}_z\vec{x} = x\vec{x}$ добити $\hat{S}_z\hat{S}^+\vec{x} = (x+1)\hat{S}^+\vec{x}$, тј. $\hat{S}_z\vec{y} = (x+1)\vec{y}$, где $\vec{y} = \hat{S}^+\vec{x}$. На исти начин $\hat{S}_z\hat{S}^-\vec{x} = (x-1)\hat{S}^-\vec{x}$, односно $\hat{S}\vec{y}' = (x-1)\vec{y}'$, са $\vec{y}' = \hat{S}^-\vec{x}$.

Само мало су сложеније ствари у квантној физици, где за фиксирани спин или интензитет орбиталног моментума S оператор подизања $\hat{S}^+$ помера својствено стање $\psi_{s,m}$ на горе у следеће својствено стање $\psi_{s,m+1}$, а оператор спуштања $\hat{S}^-$ својствено стање $\psi_{s,m}$ премешта на доле у $\psi_{s,m-1}$.

Пример 2. Подсетимо се хармонијског осцилатора чији је хамилтонијан (2.150). Дефинишимо линеарне комбинације оператора положаја $\hat{x}$ и импулса $\hat{p} = -id/dx$ као два нова оператора:

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}), \quad \hat{a}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}), \tag{2.167}$$

за које се може показати да су такође оператори подизања и спуштања. За разлику од самих оператора положаја и импулса, оператори $\hat{a}^+$ и $\hat{a}^-$ нису хермитски и као такви не представљају обзервабле (физички мерљиве величине).

Њихов производ је замало Хамилтонијан:

$$2\hat{a}^+\hat{a}^- = \hat{x}^2 + \hat{p}^2 - i(\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p}) = 2\hat{H} - i[\hat{p}, \hat{x}] = 2\hat{H} - 1,$$

$$2\hat{a}^-\hat{a}^+ = \hat{x}^2 + \hat{p}^2 + i(\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p}) = 2\hat{H} + i[\hat{p}, \hat{x}] = 2\hat{H} + 1,$$

јер је комутатор $[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$, односно:

$$\hat{a}^+\,\hat{a}^- = \hat{H} - \frac{1}{2}, \quad \hat{a}^-\,\hat{a}^+ = \hat{H} + \frac{1}{2}, \tag{2.168}$$

у систему јединица са $\hbar = 1$. Отуда и из $\hat{H}\psi = E\psi$ добијамо:

$$\hat{H}(\hat{a}^+\psi) = (\hat{a}^+\hat{a}^- + \frac{1}{2})(\hat{a}^+\psi) = \hat{a}^+(\hat{a}^-\hat{a}^+ + \frac{1}{2})\psi =$$

$$= \hat{a}^+(\hat{H} + 1)\psi = \hat{a}^+(E + 1)\psi = (E + 1)(\hat{a}^+\psi),$$

односно:

$$\hat{H}(\hat{a}^+\psi) = (E + 1)(\hat{a}^+\psi), \quad \hat{H}(\hat{a}^-\psi) = (E - 1)(\hat{a}^-\psi), \tag{2.169}$$

где је друга једнакост добијена на сличан начин првој. Према томе, $\hat{a}^+\psi$ је сопствена функција енергије која је за тачно један корак већа од саме ψ. У уобичајеним јединицама тај корак енергије износи $\hbar\omega$. Нема ограничења у оваквом пењању за хармонијски осцилатор, али при спуштању не може се ићи ниже од основног стања енергије $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

Као што знамо, у (овој) ортонормираној бази матричне репрезентације оператора подизања и спуштања за квантни хармонијски осцилатор су:

$$\hat{a}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix}, \quad \hat{a}^- = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix}, \tag{2.170}$$

што следи из $a^+_{jk} = \langle\psi_j|\hat{a}^+|\psi_k\rangle$ и $a^-_{jk} = \langle\psi_j|\hat{a}^-|\psi_k\rangle$, аналогно (2.149).

2.7 Друга квантизација

Друга квантизација је формализам који се користи за опис и анализу квантних система много тела. У теорији квантног поља она се назива и канонска квантизација, у којој се поља (обично као таласне функције материје) сматрају операторима поља са особинама сличним физичким величинама (положај, импулс, итд.), иначе операторима прве квантизације. Кључне идеје ове методе увео је Пол *Дирак* (1927), а развили су је, пре свега, Владимир *Фок* и Паскал *Јордан*.

2.7.1 Гибсов парадокс II

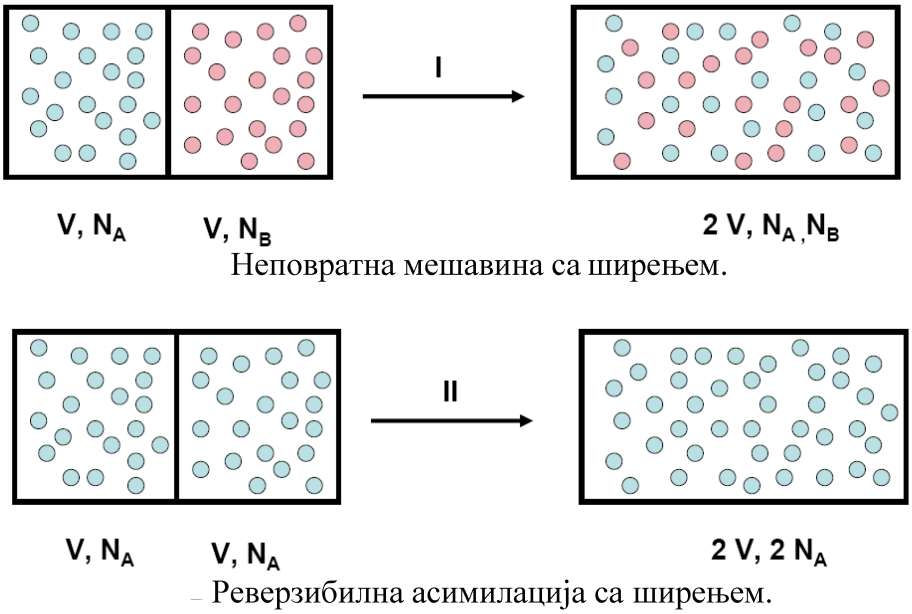
Парадокс *Гибса*[35] из 1875. године јавља се у *ентропији* статистичке механике када се све честице гаса сматрају различитима у ситуацији када оне то више нису. Разрешење парадокса је третирање честица истог гаса неразлучивим, таквима да се при *пермутацији* (замени места) две честице стање система не мења. У ситуацијама као на слици 2.10, ово прво разматрамо укратко.

На горњем делу слике су два дела изоловане посуде истих запремина V напуњена идеалним гасом исте температуре T, са и без преграде. Нека је у левом делу један мол гаса A, а у десном један мол гаса B, или као на слици редом са бројем позиција N_A односно N_B, ентропија S_A и S_B. Када уклонимо преграду гасови се мешају и шире по целој запремини $2V$, па се доступна запремина за поједине гасове удвостручила. Укупна ентропија је увећана за $\Delta S = 2R\ln 2$, где је R универзална гасна константа. То је пример неповратног процеса.

У доњем реду те слике у оба дела посуде је исти гас. Уклањањем преграде не мешају се и не шире „два гаса“ по за њих двоструко већим запреминама и могуће је простим враћањем преграде стање десно вратити у стање лево. То је пример повратног процеса и ако би важила иста аргументација као у претходном случају имали бисмо контрадикцију, јер сада нема промене ентропије ($\Delta S = 0$).

Примери указују да ентропија (у микроканонском ансамблу, као и у случају одсуства интеракција) није *екстензивна величина* (пропорционална количини супстанце), него је зависна од могућих распореда честица тако да је независна од редоследа истих. Она је функција комбинација а не варијација распореда. Према томе, ентропији треба додати фактор $1/N!$, где је N број подела честица и једнаке честице сматрати неразлучивим.

[35] Josiah Willard Gibbs (1839-1903), амерички научник.



Slika 2.10: Гибсов парадокс.

На страну питање одакле тај број долази, а погледајмо да је рачун ситуација са дате слике сада коректан.

Напомињем да постоје и мишљења да је овом „парадоксу“ дат превелик значај, као у прилогу (в. [10]) из којег је узета поменута слика, али сама расправа о њему опет је занимљива због импликација у тумачењу вероватноће и статистике, па онда и наводне (моје) теорије информације.

Посматрајмо идеалан гас од N честица у посуди запремине V. Посуда је подељена на два одељка запремина V_1 и V_2, тако да је $V_1 + V_2 = V$. У првом одељку број честица је N_1 а у другом N_2 тако да је $N_1 + N_2 = N$, а подразумева се да је густина честица у оба одељка иста $\rho = N_1/V_1 = N_2/V_2$.

Када се преграда између одељака уклони, а честице су идентичне, укупна ентропија не би требала порасти. Међутим, ако су ентропије у одељцима пре уклањања преграде биле редом:

$$S_1 \sim N_1 k \ln V_1 + \frac{3}{4} N_1 k, \quad S_2 \sim N_2 k \ln V_2 + \frac{3}{4} N_2 k, \tag{2.171}$$

са збирном вредношћу $S = S_1 + S_2$. Након уклањања преграде укупна ентропија је

$$S' \sim (N_1 + N_2) k \ln(V_1 + V_2) + \frac{3}{2}(N_1 + N_2) k. \tag{2.172}$$

Разлика укупних ентропија после и пре уклањања преграде је

$$\Delta S = S' - S = (N_1 + N_2) k \ln(V_1 + V_2) - N_1 k \ln V_1 - N_2 k \ln V_2,$$

дакле

$$\Delta S = N_1 k \ln \frac{V}{V_1} + N_2 k \ln \frac{V}{V_2} > 0. \tag{2.173}$$

Закључак $\Delta S > 0$ противречи претпоставци да је укупна ентропија затвореног система (довољно шири систем ових посуда) константна, па је онда противречна и закону одржања информације (пораст ентропије је губитак информације).

Уведимо сада $\ln N!$. Стирлингова апроксимација даје $\ln N! \approx N \ln N - N$, па за ентропију имамо

$$S = Nk \ln \left[\frac{V}{Nh^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} Nk, \tag{2.174}$$

верзију познате Сакур-Тетродеове једначине (Sackur-Tetrode equation). Подсећам, k је Болцманова константа, h је Планкова константа, m је маса честице, а изостављени су детаљи попут термалне таласне дужине Λ и унутрашње енергије гаса U, који не утичу на поенту. Сада прираст ентропије постаје:

$$\begin{aligned} \Delta S &= (N_1 + N_2) k \ln \frac{V_1 + V_2}{N_1 + N_2} - N_1 k \ln \frac{V_1}{N_1} - N_2 k \ln \frac{V_2}{N_2} = \\ &= N_1 k \ln \frac{V}{V_1} + N_2 k \ln \frac{V}{V_2} - N_1 k \ln \frac{N}{N_1} - N_2 k \ln \frac{N}{N_2} \\ &= N_1 k \ln \frac{V N_1}{N V_1} + N_2 k \ln \frac{V N_2}{N V_2} + 0, \end{aligned}$$

јер због константне густине $\rho = N_1/V_1 = N_2/V_2 = N/V$ нумеруси логаритама су јединице, логаритми су нуле, па је промена ентропије такође нула ($\Delta S = 0$). Према томе, уз помоћ члана $1/N!$ избегли смо Гибсов парадокс. А то је већ квантно механички третман једнаких молекула идеалног гаса.

2.7.2 Неразлучивост

Један пут од Гибсовог парадокса води ка теоремама расподела вероватноћа којима сам се бавио у књизи „Физичка информација“ (в. [3]), а други ка *елементарним честицама* физике на начин који је овде тема.

Идентичне честице у квантној механици оне су које се не разликују по маси, наелектрисању, спину, изоспину или било којој другој унутрашњој карактеристици. На њих се односи постулат *неразлучивости* који каже да се идентичне честице не могу разликовати никаквим мерењем, што је теоријска крајност која у квантној механици стоји због релација неодређености.

Када је једна честица у стању n_1, а друга у стању n_2, имамо квантно стање система које записујемо са

$$|n_1\rangle|n_2\rangle, \tag{2.175}$$

где је важан и редослед писања, па $|n_2\rangle|n_1\rangle$ значи да прва честица заузима стање $|n_2\rangle$ а друга стање $|n_1\rangle$. То је канонски начин писања базе тензорског производа простора $X \otimes X$, комбинованог система појединих простора X.

Два стања, $|n_1\rangle|n_2\rangle$ и $|n_2\rangle|n_1\rangle$, су физички еквивалентна само ако се разликују по комплексном фазном фактору. За две неразлучиве честице, стање пре замене честица мора бити физички еквивалентно стању после размене, тако да се та два стања разликују само по (комплексним) фазним факторима. Ова чињеница сугерише да се стање за двије неразлучиве (и не-интерагујуће) честице пише на следећа два начина:

$$|n_1\rangle|n_2\rangle \pm |n_2\rangle|n_1\rangle. \tag{2.176}$$

Стање за знаком „плус“ је симетрично, а са знаком „минус“ назива се антисиметрично. Комплетније писана ова стања су:

$$\begin{cases} |n_1, n_2, S\rangle = \lambda_S(|n_1\rangle|n_2\rangle + |n_2\rangle|n_1\rangle), & \text{симетрично}, \\ |n_1, n_2, A\rangle = \lambda_A(|n_1\rangle|n_2\rangle - |n_2\rangle|n_1\rangle), & \text{антисиметрично}, \end{cases} \tag{2.177}$$

где су скалари λ_S и λ_A неке константе. Приметимо да ће антисиметрично стање бити нула, ако је n_1 и n_2 исто стање, а да то не може дати квантно стање јер га није могуће нормирати. Другим речима, више од једне идентичне честице не може бити у неком антисиметричном стању. То је познати *Паулијев принцип искључења.*

Није могуће разликовати рецимо два електрона, они су идентични на сваки начин. Дакле, постоје такве честице. Означимо *оператор замене* места честица са $\hat{P}_{12}$, тако да је $\hat{P}_{12}\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$, па је $\hat{P}_{12}\hat{P}_{12}\psi(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2)$. Према томе, два пута примењен овај оператор враћа квантно стање на почетну вредност, што значи да су сопствене вредности овог оператора само две могуће, +1 и −1, па је

$$\hat{P}_{12}\psi_{\pm} = \pm\psi_{\pm}. \tag{2.178}$$

Показује се да обе ове вредности постоје у природи. Честице са квантним бројем −1 су попут електрона, оне се називају *фермиони* и спин им је полуцели број. Честице са овим бројем +1 су попут фотона, оне се називају *бозони* и спин им је цели број.

Преведено на језик изометријских трансформација, које су увек неке ротације, оператор замене можемо и овако дефинисати

$$\psi(x_1, x_2) = e^{i\alpha}\psi(x_2, x_1), \tag{2.179}$$

где је α нека реална константа. Понављајући трансформацију враћамо се на почетно стање, а функцију ψ множимо са $e^{2\alpha}$. Зато је $e^{2i\alpha} = 1$, или $e^{i\alpha} = \pm 1$, па је

$$\psi(x_1, x_2) = \pm\psi(x_2, x_1), \tag{2.180}$$

што се своди на (2.178).

Отуда и општији закључци. *Таласна функција* може имати само две могућности: или је симетрична (не мења се заменом места честица), или је антисиметрична (заменом места честица мења предзнак). Додатно, све таласне функције датог система морају имати исту симетрију, иначе би њихова суперпозиција могла бити различита и од симетрије и од антисиметрије. Зато и системи честица могу бити само или симетрични или антисиметрични, па постоје једино две врсте *статистика* Ферми-Диракова која важи за фермионе и Бозе-Ајнштајнова за бозоне.

Хамилтонијан, оператор енергије, симетричан је

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \hat{U}(|x_1 - x_2|) + \hat{V}(x_1) + \hat{V}(x_2), \tag{2.181}$$

што значи да се енергија понаша попут бозона. Са друге стране, стање фермиона које се у квантној физици пише и овако

$$\psi = u_k(x_1)u_j(x_2) \to u_i(x_1)u_j(x_2) - u_j(x_1)u_k(x_2), \tag{2.182}$$

постаје нула ($\psi = 0$) када су (било која) два фермиона у истом стању($x_1 = x_2$), а нула се не може нормирати, што значи да таква таласна функција не може бити суперпозиција и не може имати физички смисао. То је закључак једнак са оним након (2.177), да за фермионе важи Паулијев принцип искључења. Било која два фермиона не могу бити у истом стању.

Додатно тумачењу енергије (2.181), да је она типа бозона (попут фотона), затим својству елементарних честица да су или бозони или фермиони, закључујемо да су фермиони супстанцијални (материјални), попут електрона и протона. Уз то, фермиони

могу бити у конјункцији са анти-фермионима и морају се стварати у паровима, док су бозони у том смислу сами, они су своје сопствене анти-честице као што је то случај са светлошћу.

Дирак је у својој теорији електромагнетног поља (1927) први употребио операторе подизања и спуштања, а исте године су Јордан и *Клајн*[36], и следеће *Вигнер*[37] употребили Дираков опис за систем са много честица у којем честице могу интераговати.

2.7.3 Фокови простори

Нека је $\mathcal{H}$ комплексан Хилбертов простор и $n \in \mathbb{N}$ произвољан природан број. Разматрамо n-тоструки *тензорски производ* простора

$$\mathcal{H}^{\otimes n} = \mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}, \tag{2.183}$$

а за n-торку вектора $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{H}$ дефинишемо: симетрични тензорски производ

$$u_1 \vee \cdots \vee u_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} u_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\pi(n)}, \tag{2.184}$$

и антисиметричан тензорски производ

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \varepsilon_\pi u_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\pi(n)}, \tag{2.185}$$

где се сабира по свих $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ пермутација низа индекса, а ε_π је предзнак (± 1) пермутације π. Тако добијамо Фокове[38] просторе помоћу Хилбертових простора.

Затворени потпростор $\mathcal{H}^{\otimes n}$ генерисан производом $u_1 \vee \cdots \vee u_n$ означавамо $\mathcal{H}^{\vee n}$, а генерисан са $u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$ означавамо $\mathcal{H}^{\wedge n}$. Први називамо n-струким симетричним тензорским производом Хилбертових простора, а други n-струким антисиметричним тензорским производом ($\mathcal{H}$).

Слободни (или пуни) *Фоков простор* над $\mathcal{H}$ означавамо са $\Gamma_\otimes(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\oplus n}$, симетрични (или бозонски) Фоков простор је $\Gamma_\vee(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\vee n}$, а антисиметрични (фермионски) $\Gamma_\wedge(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\wedge n}$. Сваки од њих снабдевен је сопственим скаларним производом.

Најпростији случај симетричног Фоковог простора добијамо стављајући $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ а тада је $\Gamma_\vee(\mathbb{C}) = \ell^2(\mathbb{N})$. Симетричан Фоков простор никада није коначно димензионалан. Када је $\mathcal{H}$ коначне димензије n, тада је $\mathcal{H}^{\wedge m} = 0$ за $m > n$, па је $\Gamma_\wedge(\mathcal{H})$ димензије 2^n. У физици се најчешће разматрају бозонски и фермионски простори над $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$.

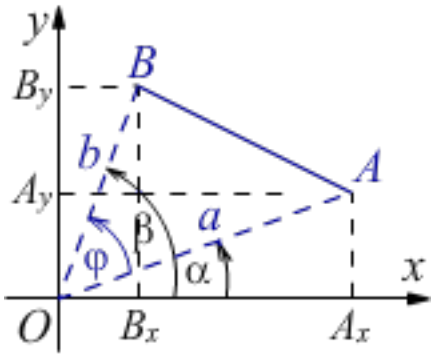
Примери комутатора

На слици 2.11 у Декартовом правоуглом систему Oxy дате су тачке $A(A_x, A_y)$ и $B(c_x, c_y)$ које представљају врхове вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, интензитета $a = |\vec{a}|$ и $b = |\vec{b}|$, отклона од апсцисе $\alpha = \angle(xOA)$ и $\beta = \angle(xOB)$, са углом између њих $\varphi = \beta - \alpha$.

Са слике, за *комутатор* координата $[A, B] = A_x B_y - B_x A_y$ лако налазимо:

$$[A, B] = (a \cos\alpha)(b \sin\beta) - (b \cos\beta)(a \sin\alpha) = ab \sin(\beta - \alpha),$$

[36] Oskar Klein (1894-1977), шведски теоријски физичар.
[37] Eugene Wigner (1902-1995), мађарско-амерички теоријски физичар и математичар.
[38] V. Fock, Z. Phys. 75 (1932), 622-647



Slika 2.11: Производ вектора.

одакле

$$[A, B] = ab\sin\varphi = \vec{a} \wedge \vec{b}, \tag{2.186}$$

који се назива и *псеудо скаларни производ*. Слично налазимо

$$\{A, B\} = A_x B_y + B_x A_y = ab\sin(\beta + \alpha), \tag{2.187}$$

што се назива *антикомутатором*. Комутатор одговара детерминанти Фоковог простора, а антикомутатор *перманенту* матрице (детерминанти без минуса).

Позиција и импулс

У класичној механици систем $n = 1, 2, 3, \ldots$ материјалних тачака описују њихове позиције $Q_k(t)$ и импулсе $P_k(t)$ за $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ у тренутку t. Функција $H(P, Q)$ тзв. *хамилтонијан* представља укупну енергију система и задовољава једначине:

$$\frac{\partial H}{\partial P_k} = \dot{Q}_k, \quad \frac{\partial H}{\partial Q_k} = -\dot{P}_k, \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{2.188}$$

Ако је $f(P, Q)$ функција трајекторије, тада је

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial t}, \tag{2.189}$$

односно

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}, \tag{2.190}$$

где је антикомутатор (2.187), сада функција, преформулисан у

$$\{h, g\} = \sum_k \frac{\partial h}{\partial P_k}\frac{\partial g}{\partial Q_k} - \frac{\partial h}{\partial Q_k}\frac{\partial g}{\partial P_k}, \tag{2.191}$$

која је аналогна комутатору (2.186). Посебно (за индексе $k, j = 1, 2, \ldots, n$) је:

$$\{P_k, P_j\} = \{Q_k, Q_j\} = 0, \quad \{P_k, Q_j\} = \delta_{kj}, \tag{2.192}$$

где је $\delta_{kk} = 1$ за свако k, а $\delta_{kj} = 0$ за $k \neq j$, што је лако проверити.

У квантној механици је ситуација у бити иста. Имамо само-адјунгован оператор $\hat{H}$ (хамилтонијан) који описује све еволуције стања путем Шредингерове једначине

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t) = \hat{H}\psi(t). \tag{2.193}$$

Такође, имамо само-адјунговане операторе $\hat{Q}_k$ и $\hat{P}_k$ који представљају позиције и импулсе и који еволуирају на начин:

$$\hat{Q}_k(t) = e^{i\hbar t\hat{H}}\hat{Q}_k e^{-i\hbar t\hat{H}}, \quad \hat{P}_k(t) = e^{i\hbar t\hat{H}}\hat{P}_k e^{-i\hbar t\hat{H}}. \tag{2.194}$$

Било која обзервабла A система задовољава једначину (комутатора) еволуције

$$\frac{d}{dt}A(t) = -\frac{i}{\hbar}[A(t), \hat{H}], \tag{2.195}$$

па опет имамо (одговарајуће) релације сада за комутаторе:

$$[\hat{P}(x), \hat{P}(x)] = [\hat{Q}(x), \hat{Q}(x)] = 0, \quad [\hat{Q}(x), \hat{P}(x)] = i\hbar\delta(x-y)\hat{I}. \tag{2.196}$$

Ове дефинишу Шредингерову једначину (2.193), а (2.192) дефинишу хамилтонијан (2.188), односно укупну енергију класичног система.

Аналогно (2.158) ако дефинишемо операторе:

$$\hat{a}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q}(x) + i\hat{P}(x)), \quad \hat{a}^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q}(x) - i\hat{P}(x)), \tag{2.197}$$

тада су $\hat{a}(x)$ и $\hat{a}^*(x)$ узајамно придружени (енг. adjoint) и важи:

$$[\hat{a}(x), \hat{a}(y)] = [\hat{a}^*(x), \hat{a}^*(y)] = 0, \quad [\hat{a}(x), \hat{a}^*(y)] = \hbar\delta(x-y)\hat{I}, \tag{2.198}$$

а то су *канонске релације* комутатора. Формулације јединствености канонских релација између оператора позиције и импулса називамо Стон-Нојмановом теоремом[39], назив који јој је дат по Харви *Стону*[40] и Џон фон *Нојману*[41].

Детерминанте

Скаларни производ антисиметричних тензорских производа постаје збир по свим пермутацијама (π и σ) низа индекса $1, 2, \ldots, n$

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_n | v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\rangle = \frac{1}{(n!)^2}\sum_{\pi,\sigma}\varepsilon_\pi\varepsilon_\sigma\langle u_{\pi(1)}|v_{\sigma(1)}\rangle \ldots \langle u_{\pi(n)}|v_{\sigma(n)}\rangle, \tag{2.199}$$

где су ε_π и ε_σ предзнаци ($\pm$) пермутације (парне и непарне). Ово се може представити у облику детерминанте

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_n | v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\rangle = \frac{1}{n!}\det(w_{jk}), \tag{2.200}$$

матрице чији су коефицијенти $w_{jk} = \langle u_j|v_k\rangle$ за $j, k = 1, 2, \ldots, n$.

[39] Stone–Neumann theorem: `https://arxiv.org/pdf/0912.0574.pdf`
[40] Marshall Harvey Stone (1903-1989), амерички математичар.
[41] John von Neumann (1903-1957), мађарско-амерички математичар и физичар.

Када скаларни производ простора $\mathcal{H}^{\otimes n}$ заменимо скаларним производом потпростора $\mathcal{H}^{\wedge n}$ у претходној детерминанти нестаје факторијел $n!$, па пишемо

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_n | v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle_\wedge = \det(w_{jk}), \tag{2.201}$$

при чему је

$$||u_1 \wedge \cdots \wedge u_n||_\wedge^2 = n!||u_1 \wedge \cdots \wedge u_n||_\otimes^2. \tag{2.202}$$

На левој страни једнакости је норма потпростора $\mathcal{H}^{\wedge n}$, на десној страни је норма простора $\mathcal{H}^{\otimes n}$.

На исти начин у потпростору симетричних тензорских производа $\mathcal{H}^{\vee n}$ добијамо

$$\langle u_1 \vee \cdots \vee u_n | v_1 \vee \cdots \vee v_n \rangle_\vee = \mathrm{per}\,(w_{jk}), \tag{2.203}$$

где $\mathrm{per}\,(w_{jk}) = \det_\vee(w_{jk})$ означава *перманент* матрице, детерминанту без минуса испред кофактора. Аналогно важи

$$||u_1 \vee \cdots \vee u_n||_\vee^2 = n!||u_1 \vee \cdots \vee u_n||_\otimes^2, \tag{2.204}$$

за норме потпростора $\mathcal{H}^{\vee n}$ и простора $\mathcal{H}^{\otimes n}$.

Симетрични простори

Овде подразумевамо симетричан Фоков простор $\Gamma_\vee(\mathcal{H})$. Приметимо да у таквом простору важи једнакост $u \vee \cdots \vee u = u \otimes \cdots \otimes u$. Експоненцијални, или *кохерентни вектор* (в. [9]) придружен u је

$$\kappa(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} u^{\otimes n}, \tag{2.205}$$

тако да за скаларни производ у $\Gamma_\vee$ добијамо

$$\langle \kappa(u) | \kappa(v) \rangle = \exp \langle u | v \rangle. \tag{2.206}$$

Означимо са $\mathcal{K}$ простор коначно линеарних комбинација кохерентних вектора.

Скаларни производ $\langle u|v \rangle$ два вектора ($u, v \in \mathcal{H}$) је број од нуле до један за који можемо рећи да представља њихову *усклађеност* (енг. fidelity). У случају да један од њих има смер координатне осе, њихов производ даје вероватноћу израза другог на тој оси, мерења обзервабле. Вероватноћа је реципрочна некој средњој вредности броја опција а логаритам тог броја је информација. Према томе, скаларни производ кохерентних вектора на левој страни једнакости (2.206) се према скаларном производу у експоненту односи као „број опција“ према „информацији“.

Лема 2.7.1. *Свака коначна фамилија кохерентних вектора је линеарно независна.*

Доказ. Нека су дати $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{H}$. Тада су $U_{jk} = \{u \in \mathcal{H} : \langle u|u_j \rangle \neq \langle u|u_k \rangle\}$ за $j \neq k$ густи отворени скупови у $\mathcal{H}$. Њихов пресек $\bigcap_{jk} U_{jk}$ није празан скуп, што значи да постоји $v \in \mathcal{H}$ тако да су бројеви $\alpha_k = \langle v|u_k \rangle$ раздвојени. Егзистенција скалара β_j таквих да $\sum_{j=1}^n \beta_j \kappa(u_j) = 0$ водила би до

$$0 = \langle \kappa(zv) | \sum_{j=1}^n \beta_j \kappa(u_j) \rangle = \sum_{j=1}^n \beta_j e^{z\alpha_j},$$

за све $z \in \mathbb{C}$. Међутим, знамо да су функције $z \to \exp(\alpha_j z)$ линеарно независне, па према томе сви β_j морају бити једнаки нули. Тиме је доказано да фамилију $\{\kappa(u_1), \ldots, \kappa(u_n)\}$ чине линеарно независни (кохерентни) вектори. □

Лема 2.7.2. *Простор $\mathcal{K}$ је густ у $\Gamma_\vee(\mathcal{H})$.*

Доказ. Једнакост

$$u_1 \vee \cdots \vee u_n = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n (\varepsilon_1 u_1 + \cdots + \varepsilon_n u_n)^{\vee n}$$

показује да је скуп $\{u^{\vee n} : u \in \mathcal{H},\ n \in \mathbb{N}\}$ комплетан у $\Gamma_\vee(\mathcal{H})$. Последица је да једнакост

$$u^{\vee n} = \frac{d^n}{dt^n} \kappa(tu)\Big|_{t=0}$$

показује да је простор $\mathcal{K}$ густ. □

Ове две леме отварају могућност моделирања реалног физичког простора помоћу симетричног Фоковог. Прва тада говори о одвојености ћелија простора, а друга да је тај простор *свуда густ* у смислу метричких простора раније помињаних.

Королар 2.7.3. *Ако је $S \subset \mathcal{H}$ густ потпростор, тада је простор $\mathcal{K}(S)$ генерисан са $\kappa(u)$, $u \in S$, густ у $\Gamma_\vee(\mathcal{H})$.*

Доказ. Из

$$\|\kappa(u) - \kappa(v)\|^2 = e^{\|u\|^2} + e^{\|v\|^2} - 2\Re\left(e^{(u,v)}\right)$$

следи непрекидност пресликавања $u \to \kappa(u)$. Затим позовемо леме. □

Постоје и примери подскупова $S \subset \mathcal{H}$ који нису густи у $\mathcal{H}$ па ипак су густи у $\Gamma_\vee(\mathcal{H})$. Један такав (нетривијалан) пример у случају $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ је скуп S индикатора функција Бореловог скупа.

2.8 Факторизација матрице

Дате су матрице $\hat{A}$ и $\hat{C}$, а тражимо *матрицу* $\hat{X}$ такву да је $\hat{A}\hat{X} = \hat{C}$, односно:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}. \tag{2.207}$$

Матричним множењем добијамо систем линеарних једначина:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_3 = c_1, & \hat{C}(1,1), \\ a_1 x_2 + a_2 x_4 = c_2, & \hat{C}(1,2), \\ a_3 x_1 + a_4 x_3 = c_3, & \hat{C}(2,1), \\ a_3 x_2 + a_4 x_4 = c_4, & \hat{C}(2,2). \end{cases} \tag{2.208}$$

Детерминанта овог система је:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & a_4 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} - a_2 a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

односно

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}^2 = (\det \hat{A})^2. \tag{2.209}$$

За унитарну матрицу је $\det \hat{A} \neq 0$, па је $D \neq 0$ и систем (2.208) увек има решење.

Детерминанта прве променљиве (x_1) је:

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & a_2 & 0 \\ c_2 & a_1 & 0 & a_2 \\ c_3 & 0 & a_4 & 0 \\ c_4 & a_3 & 0 & a_4 \end{vmatrix} =$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & a_4 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - c_4 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & a_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= c_1 a_4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} - c_2 \cdot 0 + c_3(-a_2) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} - c_4 \cdot 0,$$

односно

$$D_1 = (c_1 a_4 - c_3 a_2) \cdot \det \hat{A}, \tag{2.210}$$

а отуда

$$x_1 = (c_1 a_4 - c_3 a_2) / \det \hat{A}, \tag{2.211}$$

због *Крамеровог*[42] правила $x_1 = D_1/D$.

Детерминанта друге променљиве (x_2) је:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & a_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & a_2 \\ a_3 & c_3 & a_4 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & a_4 \end{vmatrix} =$$

$$= -c_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_2 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} + c_4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ a_3 & a_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -c_1 \cdot 0 + c_2 a_4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} - c_3 \cdot 0 + c_4(-a_2) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

односно

$$D_2 = (c_2 a_4 - c_4 a_2) \cdot \det \hat{A}, \tag{2.212}$$

а отуда

$$x_2 = (c_2 a_4 - c_4 a_2) / \det \hat{A}, \tag{2.213}$$

јер је $x_2 = D_2/D$.

Детерминанта треће променљиве (x_3) је:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & c_2 & a_2 \\ a_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & a_3 & c_4 & a_4 \end{vmatrix} =$$

[42] Gabriel Cramer (1704-1752), швајцарски математичар.

$$= c_1 \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} - c_4 \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= c_1(-a_3) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} - c_2 \cdot 0 + c_3 a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} - c_4 \cdot 0,$$

односно

$$D_3 = (c_3 a_1 - c_1 a_3) \cdot \det \hat{A}, \tag{2.214}$$

а отуда

$$x_3 = (c_3 a_1 - c_1 a_3) / \det \hat{A}, \tag{2.215}$$

јер је $x_3 = D_3/D$.

Детерминанта четврте променљиве (x_4) је:

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 & c_1 \\ 0 & a_1 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & a_4 & c_3 \\ 0 & a_3 & 0 & c_4 \end{vmatrix} =$$

$$= -c_1 \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 \\ 0 & a_3 & 0 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_4 \\ 0 & a_3 & 0 \end{vmatrix} - c_3 \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \end{vmatrix} + c_4 \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & a_1 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$= -c_1 \cdot 0 + c_2(-a_3) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} - c_3 \cdot 0 + c_4 a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

односно

$$D_4 = (c_4 a_1 - c_2 a_3) \cdot \det \hat{A}, \tag{2.216}$$

а отуда

$$x_4 = (c_4 a_1 - c_2 a_3) / \det \hat{A}, \tag{2.217}$$

јер је $x_4 = D_4/D$.

Све ово добијамо и непосредно из матричне једнакости $\hat{A}\hat{X} = \hat{C}$ за регуларну матрицу $\hat{A}$ множећи је са лева инверзном матрицом $\hat{A}^{-1} \neq 0$. Отуда и на основу (2.207) следи

$$\hat{X} = \hat{A}^{-1}\hat{C}, \quad \det \hat{A} \neq 0, \tag{2.218}$$

и затим:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \hat{A}} \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \hat{A}} \begin{pmatrix} a_4 c_1 - a_2 c_3 & a_4 c_2 - a_2 c_4 \\ -a_3 c_1 + a_1 c_3 & -a_3 c_2 + a_1 c_4 \end{pmatrix},$$

односно:

$$\begin{cases} x_1 = (c_1 a_4 - c_3 a_2) / \det \hat{A}, & \hat{X}(1,1), \\ x_2 = (c_2 a_4 - c_4 a_2) / \det \hat{A}, & \hat{X}(1,2), \\ x_3 = (c_3 a_1 - c_1 a_3) / \det \hat{A}, & \hat{X}(2,1), \\ x_4 = (c_4 a_1 - c_2 a_3) / \det \hat{A}, & \hat{X}(2,2). \end{cases} \tag{2.219}$$

а то је тачно једнако претходним решењима (2.211), (2.213), (2.215) и (2.217).

Обзиром да за дату матрицу $\hat{C}$ постоји безброј начина задавања матрице $\hat{A}$ такве да је $\det \hat{A} = 1$ и према изложеном факторисању матрице $\hat{C}$, закључујемо да се произвољна квантна еволуција може на небројене начине представљати помоћу композиција, корака, односно под-еволуција датог процеса.

Glava 3

Додатак

Као и у претходне две књиге овог серијала, [2] и [3], рецензенти су ми били од огромне помоћи. Следе њиховим речима одговори на нека од питања о којима смо разговарали у међувремену, или нисмо стигли разговарати а тичу се теме. Из начина и дубине њихових промишљања о овим компликованим стварима, надам се, разумећете колико је добра рецензија овог текста била тежак задатак, претежак многима.

3.1 O začetnicima informacione paradigme

Duško Milinčić, prof. informatike

Informaciona paradigma, digitalna filozofija ili digitalna ontologija (što je možda najadekvatniji naziv) je usmjerenje u filozofiji i kosmologiji koje zastupaju neki matematičari, informatičari i teorijski fizičari kao što su: Edward Fredkin, Konrad Zuse, Stephen Wolfram, Rudy Rucker, Gregory Chaitin, Seth Lloyd i Paola Zizzi. Ovdje svakako spada i kolega Rastko Vuković koji svoju teoriju naziva „teorija informacija“ što možda ponekog čitaoca njegovih knjiga može zbuniti obzirom da isti naziv nosi i disciplina primijenjene matematike koja se bavi kvantifikovanjem količine informacija u sistemima, s ciljem da se komunikacija među sistemima odvija pod najboljim uslovima.

Digitalnu filozofiju je moguće posmatrati i kao savremenu verziju monističke metafizike Gottfrieda Leibniza gdje su Leibnizove monade zamijenjene nekim aspektima matematičke teorije ćelijskih automata. Pošto se, prema Leibnizu, ljudski um može tretirati na računski (kompjutacioni) način, digitalna filozofija pokušava da razmatra i neke od glavnih problema u filozofiji uma. Takođe, digitalni pristup pokušava da se nosi i sa ne-determinističkom kvantnom teorijom, gdje pretpostavlja da sve informacije, u smislu svoje reprezentacije, moraju biti konačne i diskretne. Kolega Vuković, ako sam ispravno shvatio njegovu teoriju, zastupa vrlo slično gledište. Osim toga, ova paradigma pretpostavlja da evolucijom nekog fizičkog stanja upravljaju lokalna i deterministička pravila.

U digitalnoj filozofiji, samo postojanje (realnost, stvarnost) i misao se sastoje isključivo od izračunavanja. Engleski termin je computation, koji je po mom mišljenju adekvatniji ali ne baš lako prevodiv na naš jezik, pa ćemo nadalje koristiti riječ kompjutacija, koliko god ona izgledala rogobatnom i van duha našeg jezika. Potrebno je ovdje napomenuti da ne mora nužno svaka kompjutacija biti i misao. Dakle, kompjutacija je jedina supstanca monističke metafizike, dok se subjektivitet pojavljuje iz kompjutacione univerzalnosti. Postoje mnoge varijante digitalne filozofije; međutim većina njih su teorije digitalnih podataka koje razmatraju kako sve fizičke realnosti tako i kognitivnu nauku u u okviru teorije informacija.

3.1.1 Ko su „digitalni filozofi“?

U svom radu “Finite Nature” (Konačna priroda) iz 1992 godine, jedan od pionira računarstva Edward Fredkin je postavio dva fundamentalna zakona fizičke informacije. (Ovdje moram primijetiti da istu sintagmu „fizička informacija“, potpuno nezavisno, ne znajući za Fredkinov rad, koristi i kolega Vuković). Kao neriješeni problemi u fizici ova dva fundamentalna zakona imaju dve fundamentalne posljedice.

1. Svaka informacija mora imati digitalni način svoje reprezentacije.

2. Informacioni proces transformiše digitalnu reprezentaciju stanja sistema u njegovo buduće stanje.

Ako je Fredkinov prvi fundamentalni zakon informacije tačan, tada Einsteinova teorija opšte relativnosti nije u potpunosti tačna, budući da se ona ne zasniva na digitalnoj informaciji. Ako je Fredkinov drugi fundamentalni zakon tačan, tada poznata Kopenhagenska interpretacija kvantne mehanike nije u potpunosti tačna, budući da kvantna slučajnost nema digitalno-determinističko objašnjenje.

U Poglavlju 9 svoje knjige *A New Kind of Science* (Nova vrsta nauke), Stephen Wolfram daje nacrt nečega što bi se moglo nazvati „multiverzum-automat“. Ispod Planckove skale, postoji informacioni supstrat koji omogućava pojavu vremena, prostora i energije pomoću tzv. „parametra ažuriranja ili update-ovanja“. Ovaj parametar ažuriranja za multiverzum je analogan vremenu u smislu matematičkog izomorfizma, ali on takođe uključuje i dekompoziciju u alternativnim univerzumima. Informacioni supstrat se sastoji od mreže čvorova koja se može simulirati modelima slučajnih mreža i Feynmanovim integralima putanja. U fizičkoj stvarnosti, i energija i prostor-vrijeme su sekundarna svojstva. Najfundamentalnije svojstvo stvarnosti je propagacija signala koju uzrokuje ažurirani parametar koji djeluje na mrežne čvorove. Multiverzum-automat je model koji se sastoji od informacionog supstrata, parametra ažuriranja, nekoliko jednostavnih pravila i metoda za izvođenje kako kvantne teorije polja, tako i opšte teorije relativnosti.

Potpuno konačna priroda ovog modela implicira postojanje neobičnih sila alternativnih univerzuma koje mogu, ali i ne moraju biti suviše male za empirijsku detekciju.

Na ovom mjestu je potrebno da se osvrnemo na ranije pomenuti termin **Planckova skala**. On se odnosi na kvantitete prostora, vremena, energije i drugih veličina koje po svom redu veličine odgovaraju tzv. Planckovim jedinicama. Ovu oblast karakterišu energije od oko 10^{19} GeV, vremenski intervali od oko 10^{-43} s i dužine od oko 10^{-35} m (respektivno, ovo su približno energetski ekvivalent Planckove mase, Planckovo vrijeme i Planckova dužina). Na Planckovoj skali, predviđanja Standardnog modela, kvantne teorije polja i opšte relativnosti očekivano nisu primjenjiva, a očekuje se da dominiraju kvantni efekti gravitacije.

Planckova masa, vrijeme i dužina se inače izvode iz univerzalnih prirodnih konstanti G, $\hbar$ i c tj. gravitacione konstante, redukovane Planckove konstante dejstva i brzine svjetlosti u vakuumu po sljedećim formulama koje je dao Max Planck 1899 godine:

Planckova masa: $m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.176434(24) \times 10^{-8}$ kg

Planckova dužina: $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.616255(18) \times 10^{-35}$ m

Planckovo vrijeme: $t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.391247(60) \times 10^{-44}$ s

U svojoj knjizi *Mind Tools* (Alati uma) iz 1987 godine, matematičar i filozof Rudy Rucker osmislio je koncept sa sljedećim zaključcima o vezi između matematike i univerzuma:

1. Svijet se može razložiti na na digitalne sastavne dijelove (bitove), gdje je svaki dio sačinjen od manjih dijelova.

2. Ovi dijelovi (bitovi) formiraju fraktalni obrazac u tzv. „prostoru činjenica“ (eng. fact-space).

3. Ovaj obrazac se ponaša kao ćelijski automat.

4. Ovaj obrazac je nezamislivo ogroman po veličini i dimenzijama.

5. Iako je početak svijeta jednostavan, njegova kompjutacija je nesvodivo kompleksna.

Ruckerov drugi zaključak koristi termin „prostor činjenica“ (eng. fact-space); to je Ruckerov model realnosti zasnovan na stavu da je sve što postoji percepcija različitih posmatrača. Entitet bilo koje vrste je poput nekog čvora (Ruckerov engleski termin je *glob*) u prostoru činjenica. Svijet – zbirka svih misli i objekata – je obrazac proširen kroz prostor činjenica. Navedeni zaključci opisuju digitalnu filozofiju koja povezuje svijet sa prostorom činjenica.

3.1.2 Fredkinove ideje o fizici

Edward Fredkin (rođen 2.10.1934) je ugledni karijerni profesor na Carnegie Mellon University (CMU), i jedan od prvih pionira digitalne fizike.

Fredkinov glavni doprinos uključuje rad na reverzibilnom računarstvu i ćelijskim automatima. Dok je u knjizi Konrada Zuse-a *Calculating Space* iz 1969 godine, pomenuta važnost reverzibilne kompjutacije, poznato Fredkinovo kolo predstavljalo je suštinski proboj u ovoj oblasti. U svojim novijim radovima Fredkin koristi termin *digitalna filozofija*.

Tokom svoje karijere, Fredkin je bio profesor računarskih nauka na Massachusetts Institute of Technology (MIT), nosio je zvanja Fairchild Distinguished Scholar na Caltech-u i Research Professor of Physics na univerzitetu u Bostonu.

Digitalna filozofija je jedna vrsta pankompjutacionalizma, filozofske škole koja tvrdi da su svi fizički procesi u prirodi forme kompjutacije ili procesiranja informacije na najfundamentalnijem nivou realnosti. Pankompjutacionalizam je povezan sa nekoliko velikih filozofskih škola kao što su: atomizam, determinizam, mehanicizam, monizam, naturalizam, filozofski realizam, redukcionizam i naučni empirizam.

Pankompjutacionalisti vjeruju da se biologija svodi na hemiju koja se svodi na fiziku koja se svodi na kompjutaciju informacije. Fredkinova karijera i dostignuća u značajnoj mjeri su motivisana digitalnom filozofijom, posebnom vrstom pankompjutacionalizma opisanom u njegovim radovima: “Introduction to Digital Philosophy” (Uvod u digitalnu filozofiju), “On the Soul” (O duši), “Finite Nature” (Konačna priroda), “A New Cosmogony” (Nova kosmogonija) i “Digital Mechanics” (Digitalna mehanika).

Fredkinova digitalna filozofija sadrži nekoliko fundamentalnih ideja:

• Sve u fizici i fizičkoj realnosti mora imati digitalnu informacionu reprezentaciju.

• Sve promjene u fizičkoj prirodi su posljedice digitalnih informacionih procesa.

• Priroda je konačna i digitalna.

• Tradicionalni judeo-hrišćanski koncept *duše* ima svoj pandan u statičkoj/dinamičkoj duši definisanoj na način digitalne filozofije.

Fredkin ima radikalan pristup u objašnjavanju Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) paradoksa i eksperimenta sa dvostrukim prorezom u kvantnoj mehanici. Iako priznaje da kvantna mehanika daje tačna predviđanja, Fredkin staje na stranu Alberta Einsteina u debati Bohr-Einstein. U radu *The Meaning of Relativity* (Značenje relativnosti), Einstein piše: “Mogu se dati dobri razlozi zašto realnost uopšte ne može biti predstavljena pomoću kontinualnog polja. Čini se da iz kvantnih fenomena sa sigurnošću slijedi da konačni sistem konačne energije može u potpunosti biti opisan pomoću konačnog skupa brojeva (kvantnih brojeva). Ovo ne izgleda da je u saglasnosti sa teorijom kontinuuma, i mora dovesti do pokušaja da se

nađe čisto algebarska teorija za opis stvarnosti. Međutim, niko ne zna kako pronaći osnovu za jedan takav opis."

Einsteinova nada je bila čisto algebarska teorija; međutim, Fredkin pokušava da pronađe čisto informacionu teoriju za opis stvarnosti. Istovremeno, fizičari su pronašli neke nejasnoće i probleme sa kompatibilnošću sa Bellovom teoremom i nedostatak empirijske opovrgljivosti (eng. falsifiability) u Fredkinovom izražavanju svojih ideja. U radu "Digitalna filozofija", poglavlje 11, Fredkin postavlja pitanje: "Može li fizika imati jaki zakon očuvanja informacije?" i odmah odgovara na svoje pitanje: "Ako je tako, moramo ponovo razmotriti dezintegraciju čestica, neelastične sudare i kvantnu mehaniku da bismo bolje razumjeli šta se dešava sa informacijom. Pojava jednog jedinog istinski slučajnog događaja je apsolutno nekompatibilna sa jakim zakonom očuvanja informacije. Veliki dio informacija je očigledno povezan sa trajektorijom svake čestice i ta informacija mora biti očuvana. To je vrlo veliki problem u digitalnoj filozofiji/fizici, ali takvi problemi se rijetko razmatraju u konvencionalnoj fizici."

U radu "Five big questions with pretty simple answers" (Pet velikih pitanja sa dosta jednostavnim odgovorima) Fredkin kaže: "Digitalna mehanika predviđa da će za svaku kontinualnu simetriju u fizici postojati neki mikroskopski proces koji narušava tu simetriju." Stoga, po Fredkinu, na Planckovoj skali, obična materija može imati spin/ugaoni moment koji narušava princip ekvivalencije. Možda bi mogle postojati neke neobične Fredkinove sile koje uzrokuju torziju u prostor-vremenu.

Einstein–Cartanova teorija proširuje teoriju opšte relativnosti da bi mogla da objasni spin-orbitno sparivanje kada je prisutna materija sa spinom. Prema konvencionalnom znanju u fizici, torzija je nepropagirajuća, što znači da će se torzija javiti unutar masivnog tijela i nigdje drugdje. Prema Fredkinu, torzija se može javiti izvan i oko masivnih tijela, zato što alternativni univerzumi imaju anomalne inercijalne efekte.

3.1.3 Fredkinova nova kosmogonija

U svom radu „Nova kosmogonija" Fredkin pokušava da odgovori na zaista velika pitanja poput: „Kako je Univerzum počeo?" i „Šta je uzrokovalo stvaranje ovog Univerzuma?".

Čini se da se ova pitanja kose i sa naukom i sa zdravim razumom. Zdrav razum nam govori da nešto ne može nastati iz ničega. Nauka proklamuje da je količina mase/energije očuvana ili uvijek ista i nepromijenjena. Zdrav razum kaže da priča o univerzumu mora da ima početak. Nauka kaže da je univerzum počeo sa Velikim Praskom. Problem je u ovome: ako je univerzum imao početak tada prije početka univerzuma nije bilo; univerzum ne može nastati iz ničega, pa ipak univerzum postoji.

Ovo jednostavno ne ide jedno s drugim. Ili ćemo vjerovati da je univerzum postojao oduvijek ili se na početku dogodila nekakva magija. U izvjesnom smislu, fizika nas ostavlja na cjedilu kada pokušamo da sagledamo šta je to što je stvorilo univerzum tako da se mogao dogoditi Veliki Prasak. Prema Fredkinu, međutim, filozofija konačne prirode daje nam način da pogledamo iza Velikog Praska. Ona nam daje mogućnost da razmišljamo o tome kako je univerzum nastao, pa čak i o tome zašto je univerzum nastao.

Odgovor leži u zadivljujućoj posljedici jednostavne pretpostavke o konačnoj prirodi. Konačna priroda znači da ono što stoji iza fizike je u suštini kompjuter. Ne onakav kompjuter kakav mi imamo u svojim kućama, već mogli bismo reći, njegov „rođak"; ćelijski automat. Nama nisu poznati detalji tog kompjutera, ali to nije ni važno zato što mašina koju je izumio veliki britanski matematičar Alan Turing dokazuje da nije ni potrebno da znamo detalje! Ono što je Alan Turing učinio tridesetih godina dvadesetog vijeka je to da je izumio Turingovu mašinu. To je zapravo način formalizovanja svih stvari koje matematičar

može uraditi pomoću olovke i papira. Ovaj rezultat dokazuje da bilo koji obični kompjuter, ako mu se da pravi program i dovoljno memorije, može uraditi sve što može da uradi i svaki drugi kompjuter. On takođe može uraditi sve što bilo koji matematičar može uraditi; ako bi samo znao kako da napiše program! Konačna priroda implicira da je proces koji stoji iza fizike neka vrsta kompjutera, pa stoga podliježe Turingovom dokazu. To znači da postoji ne samo jedna vrsta takvog kompjutera, već da postoji beskonačno mnogo mogućih ekvivalentnih kompjutera. Naravno, neki su jednostavniji, neki su elegantniji, neki koriste najmanju količinu različitih resursa, neki su brži... Ovo opet znači da kada jednom shvatimo da je na dnu svega kompjuter, već znamo mnogo čak i prije nego što tačno saznamo koja vrsta kompjutera bi, po nekim kriterijima, bila najefikasnija za ovaj zadatak.

Gdje se nalazi Vrhovni Kompjuter?

Kad god postavimo pitanje gdje se nešto nalazi, šta god to bilo, uvijek možemo nepogrešivo dati apsolutno tačan odgovor: to se nalazi u univerzumu! Što se tiče Vrhovnog Kompjutera, možemo dati jednako tačan odgovor: on nije u univerzumu – on je na drugom mjestu. Ako su i prostor i vrijeme i materija i energija svi posljedice informacionog procesa koji se odvija na Vrhovnom Kompjuteru tada je sve u našem univerzumu predstavljeno tim informacionim procesom. Mjesto gdje je taj kompjuter, onaj na kome se odvija taj proces, Edward Fredkin je izabrao da nazove engleskom riječju "Other" (Drugo).

Kolega Rastko Vuković je za sličan koncept (ako sam ga dobro shvatio) izabrao naziv *pseudo-realnost*.

Šta možemo da saznamo o tom Drugom Mjestu?

Iznenađujuće je da postoji mnogo toga što možemo da zaključimo o vjerovatnim karakteristikama *Drugog* (*Other*). To se može uraditi sa više različitih pristupa.

1. Moramo ispitati koji su mogući razlozi za postojanje ovog univerzuma; da li on služi nekoj svrsi ili je on možda artefakt nekog većeg procesa?

2. Moramo tragati za resursima koji su neophodni za kompjutaciju ovog univerzuma, kao za mjerom raspoloživih resursa u *Drugom/Other*.

3. Možemo razmotriti zakone fizike u ovom univerzumu i implikacije u *Drugom/Other*.

4. Potrebno je razmotriti veliki plan ovog univerzuma u kontekstu alternativnih univerzuma.

Pomoću ovih razmatranja moguće je istraživati *Drugo/Other*.

Postoji li razlog za stvaranje univerzuma?

Prvo razmatranje je zapravo tačka grananja odakle se moraju istraživati obe grane. Ako univerzum služi nekoj svrsi da li to znači da postoji neki inteligentni kreator? Prije svega moramo se naviknuti na ideju da u ovom kontekstu, inteligencija nalik ljudskoj nije relevantna. Ljudi su prototip mislećih bića na ovoj planeti. Kao takvi, naši mozgovi su vrlo bliski po građi i sposobnostima mozgovima drugih primata kao što su šimpanze ili gorile. Ovo nije omalovažavajuće za ljude nego jednostavno tvrdnja o relativnoj poziciji ljudske inteligencije; šta drugo joj može biti blisko? Kao prototip mislećih bića mi intelektualno djelujemo pomoću mehanizama koji su zapravo dizajnirani (putem evolucije) za druge zadatke. Nismo imali naučnike dovoljno dugo da bi se razvio mozak koji je bolji u bavljenju naukom; osim toga, šta je proces selekcije? Već možemo vidjeti mogućnosti vještačke inteligencije koja se pojavila ovdje na zemlji i pored koje ljudska inteligencija po svakoj objektivnoj mjeri sposobnosti izgleda sasvim mala. Mogli bismo zamisliti kompjuter veličine jednog kubnog metra koji sadrži 1025 računsko-memorijskih elemenata, koji rade u ciklusima od 1012 po sekundi. Jedna takva mašina mogla bi da nadmaši snagu svih kompjutera napravljenih do sada udruženih sa mislećom snagom svih ljudi koji su ikada živjeli.

Ovo ne bi trebalo da nas plaši, pošto nijedna takva mašina neće biti bolja od nas u tome

da bude čovjek, ona će nas samo nadmašiti u mišljenju. Danas imamo mašine koje prevazilaze ljude po svakoj fizičkoj mjeri; one su brže, preciznije, jače, mogu da lete, plove preko okeana, istražuju površinu Venere, gledaju u udaljene galaksije, zaviruju u atome itd. Mi nismo zaplašeni fizičkim sposobnostima mašina, i još uvijek učestvujemo u ljudskim sportskim događajima kao što je maraton uprkos činjenici da motocikl pređe tu razdaljinu mnogo brže. Slično tome ne bismo trebali da brinemo o mašinama koje vrše aritmetičke operacije milijardama puta brže od ljudi, i u krajnjem slučaju rade bilo koju vrstu intelektualne aktivnosti brže i tačnije od ljudi. Takva mašina neće biti bolja od nas u tome da bude čovjek, kao što ni čovjek nikada neće biti bolji od miša u tome da bude miš. Miševi će uvijek radije živjeti, djelovati i igrati se u društvu drugih miševa čak iako bi im bila data mogućnost da zamijene društvo miševa sa ljudskim. Pitajte bilo kog laboratorijskog miša.

Poenta je u tome da će mašine (sa vještačkom inteligencijom) koje ćemo možda izgraditi u budućnosti biti kvalitativno različite od ljudi po intelektualnim sposobnostima. Mi ne možemo govoriti o vještačkoj inteligenciji kao „inteligentnoj“ u ljudskom smislu. Nešto što je možda stvorilo naš univerzum na svrhovit način je veoma različito od nečega sa inteligencijom nalik na ljudsku ili od vještačke inteligencije kakvu vidimo ovdje na Zemlji. Možda im je jedina zajednička stvar koncept pitanja i koncept traženja odgovora.

Kada je primitivni čovjek ovladao vatrom, to je bio veliki korak. Međutim, univerzum je pun vatre; pogledajmo zvijezde. Zato što mi možemo da mislimo, a niko drugi na našoj planeti izgleda da to ne može, prirodno je da mi naše intelektualne sposobnosti visoko cijenimo. Međutim, moguće je da procesiranje informacija, umjesto da bude isključiva oblast nas ljudi i naših mašina, jeste dio gotovo svega u fizici. Sam život je jasno posredovan digitalnom informacijom; genetskim kodom. Digitalna mehanika pretpostavlja da je fizika takođe proces zasnovan na informacionom procesiranju. Možda ćemo morati da se otarasimo predrasude da je svrhovita, na mišljenju zasnovana aktivnost ekskluzivni domen ljudi ili čak vanzemaljaca sličnih ljudima. Postoje takve vrste mišljenja koja su nama kvalitativno nezamisliva iako o njima možemo misliti kvantitativno. Ne bismo se trebali plašiti toga da razmotrimo intelektualnu aktivnost kao pokretačku silu koja stoji iza stvaranja univerzuma. Pažljivim i kvantitativnim ispitivanjem mogućih parametara digitalne mehanike, možemo doći do razumnih pretpostavki o tome šta bi mogla biti svrha koja stoji iza stvaranja univerzuma poput našeg. To nas, zauzvrat, može dovesti do inteligentnih spekulacija o *Drugom/Other*, tom prostoru gdje se nalazi stroj našeg svijeta.

Ako pretpostavimo da je Vrhovni Kompjuter bio konstruisan sa svrhom da bi pronašao neki odgovor, tada još imamo mogućnost da:

1. Ono što vidimo kao naš univerzum možda radi da bi došlo do tog odgovora.
2. Univerzum kakvog poznajemo, u svojoj cijelosti, može biti artefakt.

U svakom slučaju, naše postojanje ovdje na Zemlji možda jeste, a možda i nije u potpunosti sporedno i uzgredno što se tiče pomenute svrhe.

Ako je univerzum dizajniran i konstruisan od nekog kreatora da bi odgovorio na neko pitanje, to dovodi do novog pitanja. „Ako je on toliko pametan i sposoban da je u stanju da stvori naš univerzum, zašto ga nije jednostavno zamislio i došao do odgovora u svojoj glavi/umu?“ (Uz izvinjenje na antropomorfnim aluzijama.) Jedan od interesantnih rezultata kompjuterskih nauka, koji nadilazi zakone fizike, jeste da neki rezultat koji je dobijen radom kompjutera u određenom broju koraka, generalno ne može biti dobijen nekom prečicom. Ovo je posljedica čuvenog problema zaustavljanja (eng. halting problem) kojeg je prvi postavio Alan Turing. Ime “halting problem” dolazi od stare ideje da bi se kompjuter koji radi trebao zaustaviti kada dođe do odgovora. Pitanje je, može li neki drugi kompjuter posmatrati šta prvi kompjuter pokušava da uradi i pronaći način da dođe do odgovora u

manje koraka? Naravno, ako je prvi kompjuter neefikasno implementiran, tada neki efikasniji kompjuter može da ubrza stvari. Ako je program tako napisan da se izvršava neefikasno, onda njegovo reprogramiranje može da ubrza stvari. Međutim, generalno nema načina da uzmemo programe i reprogramiramo ih tako da sada rade brže. Ovo ograničenje je poznato kao Teorema ubrzanja (eng. Speed Up Theorem).

Ono što nam Teorema ubrzanja kaže jeste da ako je pretpostavka o konačnoj prirodi tačna, i ako je *kreator* univerzuma kompetentan, tada nema puta da kreator dođe do *odgovora* na bilo koji način brže nego da pusti stvari (univerzum) da idu svojim tokom. A šta je sa pitanjem „Zašto *kreator* to jednostavno ne uradi u svojoj glavi?“ Odgovor je prilično jednostavan: Uraditi to na kompjuteru i uraditi to u svojoj glavi je potpuno ista stvar. I jedno i drugo su primjeri upotrebe informacionog procesa da bi se došlo do odgovora. Ovdje ne govorimo o kreatorovom nalaženju analitičkog rješenja u njegovoj glavi (teorema ubrzanja ne dozvoljava takva rješenja) nego o njegovom zamišljanju svakog koraka nekog ćelijskog automata u njegovoj glavi.

Jedna poznata priča govori o tome da Bog možda sanja sve ovo, a mi smo samo likovi u njegovom snu. Možda bismo trebali biti oprezni da ne učinimo ništa što bi moglo da ga probudi!

3.2 Квантни компјутери – двије стране новчића

Александра Радић, prof. физике

Сваки компјутер, између осталог, служи да обради мноштво информација за нас, те да нам да резултат, који ће нам ријешити одређени проблем. Међутим, ако је та функција компјутера универзална, зашто су такозвани квантни компјутери супериорнији од класичних суперкомјутера? Ради се о брзини обраде података.

Класични компјутери носе информације у битима, који имају двије вриједности, 0 или 1. Квантни компјутери за то користе квантне бите – кјубите. Из квантне механике је познато да стање квантног система, као што су субатомске честице, није строго одређено, тј. познато. То значи да се квантни систем може налазити не само у стањима 0 или 1, него може да буде у стању 0 и 1, тј. може да постоји у оба стања истовремено. Ова појава назива се суперпозиција стања. Ради се о линеарној суперпозицији облика $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, гдје су α и β коефицијенти који дају вјероватноћу за стања 0 и 1. Та стања су заправо квантна, као што су, на примјер, спин електрона или поларизација фотона и она су непозната тј. неодређена, све док се не детектују. Потребно је одржавати систем у суперпозицији стања довољно дуго да би се са њим извршиле дате операције, што представља и ограничење броја операција за дати кјубит. То значи да квантни систем мора да буде изолован од спољашњег свијета и тада се налази у такозваној квантној кохеренцији. И најмања пертурбација од стране сусједног атома или спољашњег електромагнетог поља или топлотних флуктуација, може да наруши то стање. Међутим, када се коначно изврши мјерење и добије резултат, те се стање објелодани, долази до такозване квантне декохеренције, и тиме кјубит прелази у бит. Постоје, између осталих, два физичка начина на који се ти квантни системи одржавају тј. контролишу. Први начин је кориштењем суперпроводника (IBM, Intel, Google и други). Хлађењем материјала са суперпроводним својствима температуре блиске апсолутној нули ($-273,15^o$ C), ти материјали постају скоро савршени проводници, тј. практично без електричног отпора. Са класичне стране, електрична струја у тим навојцима може истовремено тећи у смјеру казаљке на сату и у обрнутом смјеру, чиме

је она у два стања истовремено (или можемо рећи у неодређеном стању, тј. „између“ два стања). Такав кјубит назива се „трансмон“. Они чине скупове наелектрисања увезане у такозване Куперове парове електрона који представљају суперфлуид који се креће кроз кристалну решетку суперпроводника. Други начин је кориштењем електромагнетих поља који заробљавају јоне у одређеном дијелу простора у вакуумској комори. Ласерски снопови усмјерени на јоне служе да мијењају стање валентног електрона при чему се он креће између два нивоа у јону, и на тај начин се ствара подједнака вјероватноћа за оба стања. На оба споменута начина добијају се осцилујуће наелектрисане честице, које представљају кјубите.

Такође, квантна спрегнутост је још једна појава која омогућује рад квантних компјутера. Споменуте суперпозиције различитих квантних система могу бити спрегнуте, тј. међусобно зависне, тако да мјерење стања једног система утиче на детекцију стања другог система.

Квантни системи стога могу да буду у више стања истовремено, што омогућава истовремено извршавање више операција. Ако се класичном рачунару повећа број бита, он и даље може да ради само са једним стањем у одређеном времену. Међутим, ако се квантном компјутеру повећа број кјубита, он може да ради са свим могућим стањима истовремено. Ако компјутер има n кјубита, онда они могу представљати истовремено 2^n њихових стања. Резултат је n коначних стања. Са око 50 кјубита квантни компјутери постају еквивалентни класичним компјутерима са око 10^{15} бита. Стога, извршавање комплексних радњи одвија се много брже код квантних него код класичних суперкомпјутера. Класични компјутер је довољно брз за наше свакодневне потребе и релативно сложенија математичка рачунања. Међутим, за изучавање сложених природних појава какве сурећемо, између осталог, у физици, хемији, медицини, финансијском тржишту итд., пожељни су квантни компјутери. То су, на примјер, статистичке анализе података, разне врсте сортирања бројева, прављење модела за предвиђање будућности – као што је временска прогноза, симулације кретања у природи, као и интеракција (молекула, хемијских реакција, свемирских летјелица и слично), учење разних образаца код вјештачке интелигенције, нуклеарне фузије, интеракције лијекова и слагање протеина у медицини. Ричард Фајнман је предложио 1981. године да се квантни рачунари искористе за симулације квантне механике, што би потпомогло и развој хемије и биологије. Примјене такве технологије иду далеко ван набројаног. Ради поређења брзине квантног и класичног компјутера наведимо објављени рад о „Квантној надмоћи“ (Quantum supremacy using a programmable superconducting processor (2019) – F.Arute, K. Arya, J. Martins et al.), у којем се тврди да је њиховом „Sycamore“ процесору било потребно око 200 секунди да прикупи један сет података о квантном колу милион пута, за шта би класичном суперкомпјутеру требало око 10 000 година.

Границу од 50 кјубита је престигао IBM, а и Google, а утрка се и даље наставља. Међутим, број кјубита није једини фактор. Чак штавише, повећање броја кјубита повећава и број грешака које настају у прорачуну, при преносу информација са једног на други кјубит. Додатни фактор је квантни волумен, односно количина података која може да се обради без грешке или да се грешка исправи што брже. Ово је нарочито важно због ограниченог трајања квантних стања кјубита. Велики проблем са квантним системима су насумичне флуктуације и грешке, јер су они веома деликатни и непредвидиви. Приликом сваке операције, постоји шанса да кјубит постане уништен. Тако да се не ради само о величини, већ о квалитету израде кјубита који производе мање грешака.

Такође, постоји разлика између двије раније наведене технологије израде квантних

компјутера. Заробљавање јона ласерским сноповима значи да између њих постоји електромагнетна интеракција. То значи да се осцилације, а самим тим и информације, са једног јона преносе на друге јоне великим брзинама. С друге стране, у суперпроводницима су само неки јони повезани, што значи да је пренос информација спорији и подложнији настанку грешака. Једна предност суперпроводних квантних компјутера је што се његови дијелови могу израдити на сличан начин као и код класичних рачунара. Међутим, квантно стање њихових кјубита се одржава само неколико милисекунди, што ограничава вријеме за извршење операција. С друге стране, заробљавањем јона, њихово квантно стање се одржава неколико секунди или чак и дуже, што је боље. Али је извршавање операција доста спорије него код суперпроводника. Дакле, повећање броја кјубита није пресудно, јер оно повећава шансу за настанак грешака, док код суперпроводника оно доводи до проблема повезивања кјубита. Још један фактор против повећања броја кјубита је да се тиме квантни систем увећава, чиме он губи квантна својства.

Дакле, преостају проблеми попут постојања неизбјежних грешака при извршењу операција са квантним системима, те сам начин израде физичких комерцијалних квантних рачунара, који су још увијек непревазиђени. Да ли ће квантни компјутери успјети да се примјене у пракси за све те очекиване велике преокрете и напредак савременог друштва у широком дијапазону области или ће се коначно одустати од тих великих очекивања усљед недовољног успјеха и превеликих трошкова – остаје да се види у наредним деценијама. Многе водеће компаније попут IBM, Intel, Microsoft улажу у квантне компјутере. Већ постоји велики број јавно доступних квантних компјутера „у облаку“ (cloud-based), који се увелико користе. Квантни компјутери су искориштени и за анализе података о актуелном коронавирусу. IBM планира да повећа свој тренутни компјутер са 65 на 1000 кјубита у наредне три године. Google је успјешно направио симулацију сложених хемијских реакција чиме је дијелом доказао очекивану практичну примјењивост квантних компјутера.

Епилог

Ма како ми се то у почетку чинило једноставно да ћу препричати „неколико“ последица принципа (моје) теорије информације, са сваким наставком циљ је одмицао. Везати теорију само за математику или физику, а изоставити на пример биологију, психологију, социологију или право, чинило се недовољно као и рецимо ограничити употребу компјутера на решавање математичких задатака. Специфичност поставки, њихова новина и ширина тема на које се односе нису ми дозволиле да у овако кратком приказу шире уђем у евентуалне примене, нити да бар грубо заокружим целину. Остао сам на покушају да отворим и нагласим само део проблематике.

Током почетака епидемије корона-вируса, марта и априла 2020, друго поглавље ове књиге (Формализам) било је завршено, али били су завршени и сви текстови два месеца касније штампане књиге „Минимализам информације“ [2]. Тада, од марта до маја, гомилали су ми се прилози и колебања око њиховог избора и одлука је пала на штампање хронолошки првих, шкартирања неких и чувања овде изложених радова (за сада, 2020) само у дигиталном формату.

Оно што овде фали биле би допуне класичној теорији информације (Марковљевим ланцима и процесима уопште, ергодичком теоријом, кодирањем), детаљна објашњења физичких сила или стандардног модела честица, разраде псеудо-информације (део информације који остаје изван дате перцепције) и много актуелних тема које су изван егзактних наука. Нешто од тога можда и ја објавим.

Аутор на промоцији књиге „Физичка информација“ у Народној и универзитетској библиотеци Републике Српске Бања Лука, 13. децембра 2019.

Bibliografija

[1] Растко Вуковић: *ПРИЧЕ О ИНФОРМАЦИЈИ* – физике, биологије, права; Економски институт Бања Лука, 2021. (https://archive.org/details/price_202008)

[2] Растко Вуковић: *МИНИМАЛИЗАМ ИНФОРМАЦИЈЕ* – физичка информација и примене; Економски институт Бања Лука, 2020. (https://www.scribd.com/document/421087302/Minimalizam-informacije)

[3] Растко Вуковић: *ФИЗИЧКА ИНФОРМАЦИЈА* – у друштвеним појавама и математици; Економски институт Бања Лука, 2019. (https://www.scribd.com/document/406574702/)

[4] Растко Вуковић: *КВАНТНА МЕХАНИКА* – репрезентација континуума, метричког и векторског простора; Економски институт Бања Лука, 2019. (https://www.scribd.com/document/366396575/Kvantna-mehanika)

[5] Растко Вуковић: *МНОГОСТРУКОСТИ* – Избори живог и неживог света; Економски институт Бања Лука, 2018. (https://www.scribd.com/document/383446611/Mnogostrukosti)

[6] Rastko Vuković: *Complex Numbers* – Geometry and Algebra of Quaternions; February 10, 2016. (https://www.academia.edu/21767806/Complex_Numbers_Geometry_and_Algebra_of_Quaternions)

[7] Rastko Vuković: *TRIANGULATION*, September 13, 2014; (https://www.academia.edu/8314717/Triangulation)

[8] Rastko Vukovic: *Quaternion fields* – The six dimensions of space-time; December 3, 2014. (https://www.gsjournal.net/Science-Journals-Papers/Author/1601/Rastko,%20Vukovic)

[9] Jean-Pierre Gazeau: *Coherent States* in Quantum Physics, Wiley-VCH, Berlin, 2009. (http://www.fulviofrisone.com/attachments/article/426/Coherent%20States%20in%20Quantum%20Physics.pdf)

[10] Arieh Ben-Naim: *On the So-Called Gibbs Paradox, and on the Real Paradox*; Department of Physical Chemistry, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, Israel; Received: 12 July 2007 / Accepted: 17 September 2007 / Published: 21 September 2007. (https://www.mdpi.com/1099-4300/9/3/132/htm)

[11] Joseph A. Gallian: *Contemporary Abstract Algebra* (EIGHTH EDITION, 2013), University of Minnesota Duluth, 2012938179, 2006. (`file:///C:/Users/Rastko/Downloads/Contemporary%20Abstract%20Algebra%20%20-%20Gallian,%20Joseph%20A._4975.pdf`)

[12] David Pole: *Linear Algebra* – A Modern introduction, Second Edition, Trent University, 2006.

[13] Viktor Prasolov: *PROBLEMS IN PLANE AND SOLID GEOMETRY*, translated and edited by Dimitry Leites.

[14] Slobodan Aljančić: *UVOD U REALNU I FUNKCIONALNU ANALIZU* (treće izdanje); Univerzitet u Beogradu; Izdavačko preduzeće Građevinska knjiga Beograd, 1976.

[15] Svetozar Kurepa: KONAČNO DIMENZIONALNI *VEKTORSKI PROSTORI* I PRIMJENE (drugo izdanje), Zagreb 1976.

[16] Irving Kaplansky: *SET THEORY AND METRIC SPACES*, University of Chicago, Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1972.

Indeks

Ајнштајн, 16, 22
    АПР парадокс, 25
    опште једначине, 50
Банах, 34
    непокретна тачка, 85
Бејерот, 11
Бел, 24
    неједнакост, 25
    теорема, 66
Болцано, 81
Болцман, 22
    ентропија, 48
Бул, 20
Буњаковски, 71
Де Број, 16
Дирак, 28
    друга квантизација, 119
Еверет, 48, 49
    много светова, 66, 72
Фајнман, 41
    дијаграм, 89
Фок, 28
    канонска квантизација, 119
    простор, 123
Фурије, 116
Гедел, 34, 66
    теорема о непотпуности, 43
Гибс, 22, 119
    парадокс, 23
Гледвел, 57
Грамова детерминанта, 74
Хајзенберг, 12, 16
    матрице, 117
    релације неодређености, 24
Хамилтон, 103
Хартли, 39
Хилберт, 24
    алгебра, 26
Хук, 14
Јанг, 47
Јордан, 28, 119
Кантор, 31
    скуп, 80
Карно, 21
Кејли-Хамилтонова теорема, 98
Кеплер, 15
    други закон, 88, 95
    трећи закон, 16, 88
Клајн, 123
Клајн-Гордонова једначина, 61
Клаузијус, 21
Коши, 71
    низ, 84
Крамер, 128
Кулон, 90
Лагранж, 71
Лаплас, 104
    о вероватноћи, 115
Лијева група, 107
Лоренз, 57
Меиџи обнова, 22
Мендељејев, 23
Наполеон, 22
Неш, 72
Нетерина теорема, 105
Нојман, 125
Његош, 35
Њутн, 16
    призма, 41
    трећи закон, 88
Османско царство, 22
Парето, 36
Паули, 26
    матрице, 45, 60, 93, 100, 118
    принцип искључења, 14, 23, 122
Питагорина теорема, 50

Планк, 13, 16
константа, 111
редукована константа, 103
Раселов парадокс, 66
Ремзи, 56
Ридберг, 19
Стокхолмски синдром, 11
Стоун, 125
Шенон, 22, 40
ентропија, 48
Шредингер, 16
једначина, 24, 103
Шварц, 71
Шварцшилд, 50
Вајерштрас, 81, 85
Вигнер, 123
адхеренција, 65
адхеренција скупа, 78, 83
адхерентна тачка, 78
адхерентна вредност, 83, 85
акко, 101
аксиоме, 18
акустички притисак, 109
алгебра логике, 42
анхилација, 117
анти-сопствени вектори, 94
антикомутатор, 117, 124
антисиметрично стање, 23
апстрактна идеја, 37
апстрактно тврђење, 63
аргумент, 106
асоцијативност, 68
атом, 19, 27
ауторитет, 55
бацање новчића, 22
база
бројева, 81
метричког простора, 82
векторског простора, 75
бела боја, 46
бесконачност, 31, 34, 63, 64
бестежинско стање, 90
бијекција, 43, 98
биномна расподела, 32
биолошке врсте, 11
бит, 39
бозони, 23, 27, 122
гравитони, 54
брисана површина, 87
брзина звука, 109
централна симетрија, 105
центрипетална сила, 88
цивилизација, 10
честица у кутији, 112
дејство, 18, 45
делимични низ, 83
демократија, 35
дифракција, 48
дигитални запис, 13
дихотомија, 42
дијаметар, 76
диктатура, 36
димензије, 17
диносаурус, 43
дисјункција, 20
дискретно много, 64
дистрибуција, 68
дивергенција, 84
добро и зло, 42
друга квантизација, 119
друге категорије, 79, 84
друштвена епидемија, 57
дуализам
оператора и вектора, 17
двоструки отвор, 49
екстензивна величина, 120
електрични потенцијал, 90
електрон, 16, 27
електрослабе интеракције, 107
елементарне честице, 14, 121
енергија нулте тачке, 116
ентропија, 17, 21, 59, 119
генералисана, 48, 60
канала, 52
еволуција
квантна, 99
фермиони, 23, 27, 122
фиделити, 28
фикција, 44
филозофија, 19
флукс вероватноће, 114
фотон, 16
фреквенција, 109
функционал, 70
функционална анализа, 78
галаксија, 51

генерална ортогонална група, 107
геодезијске линије, 16
геометрија простора, 96
глобализам, 29
градијент, 90
гранична вредност, 82
гравитација, 47
    константа, 88
    потенцијал, 90
гравитони, 54
група, 68
хамилтонијан, 23, 103
    материјалних тачака, 124
    слободне честице, 115
хармоници, 109
хармонијски осцилатор, 15
хијерархија, 56
хоризонт догађаја, 53, 62
хромодинамика, 107
игре на победу, 18
индивидуа, 70
индуциран, 76
инертност, 17
инфимум, 76, 85
информација, 18, 39
    фотона, 46
    перцепције, 26, 32, 40, 70
    свеприсутна, 37
интелигенција, 56
интерференција, 46
инверзан оператор, 97
инверзна матрица, 107
инверзни елеменат, 68
иреверзибилност, 17
истина, 21, 37
изолована тачка, 78
изометрија, 76, 105
изоморфизам, 98
изведени скуп, 78, 83
једнакост, 35
капацитет канала, 52
карактеристична једначина, 109
кјутрит, 81
кохерентни вектор, 126
количина могућности, 10
количина опција, 39
комбиновано-сопствене, 96
комплексан број, 63
комплексна раван, 63
комплетан простор, 34
    комплетирање, 84
комуникација, 37
комунизам, 36
комутативност, 68
комутатор, 15, 91
    канонске релације, 125
    координата, 123
    матрица, 117
    оператора, 93
коначност, 64
кондензација, 53
конексан, 79
конјункција, 20
континуум много, 64
контрадикција, 20
контракција, 34, 85
конвергенција, 82
конзервативне силе, 88
космологија, 38, 53
кугла, 77
квант, 13
квантна механика, 99
    абецеда, 44
    осцилатор, 115
квантна спрегнутост, 24
квантни број, 19
квантно стање, 69, 99
кватерниони, 45, 60, 93, 100
лапласијан, 104
лаж, 20, 35
лажна вест, 37
лествични оператори, 117
лимес
    инфериор, 85
    супериор, 85
линеарно програмирање, 17
мајоранта, 85
математика, 20
материјализам, 18
матрица, 94, 98
    елементи, 115
    фактор, 127
међа, 65, 78
метрички простор, 76
    комплетан, 84
метрички тензор, 50

метрика, 76
минимални полином, 97
миноранта, 85
много светова, 48, 49, 60, 75
модуо, 106
момент силе, 89
монотоност, 84
мултиверзум, 75
набла, 90, 104
недељивост, 13
негација, 20
неједнакост
    Шварцова, 71
    троугла, 72
некомутативност, 13
неконекса, 79
неограничена способност, 56
непредвидљивост, 11
неразлучивост, 121
нетачно, 20
неутрални елеменат, 68
нигде густ, 79
низ, 69
норма вектора, 73
нормална расподела, 32
нормиран вектор, 73
обзервабла, 18, 99
огледалска симетрија, 105
ограничен, 76
    низ, 83
ограничења, 70
околина скупа, 77
олуја, 45
оператор, 34
    квантне механике, 103
    подизања, 117
    регуларан, 97
    замене, 122
оптимум, 48
орјентисана дуж, 69
ортогонализација, 74
ортогонална матрица, 107
ортогонални, 73
ортонормиран, 73
осна симетрија, 105
основни талас, 109
отворен скуп, 77
отворена кугла, 64
памћење простора, 51
парадокс ентропије, 22
паралелна реалност, 75, 79
перцепције, 70
перфектан скуп, 78
периодни систем елемената, 26
перманент, 124, 126
пермеабилност вакуума, 90
пермутација, 119
пиксел, 39
покривање скупа, 82
политичка коректност, 36
поље, 68
поље силе, 15, 35
потенцијал, 35
потенцијална енергија, 14, 45
потпростор, 76
површина троугла, 88
    оператора, 93
правило 80-20, 36
право, 10
    правни систем, 29
празнина, 64
принцип инерције, 48
принцип информације, 72
принцип најмањег дејства, 28, 71
принцип неодређености, 13, 112
природне јединице, 116
процес, 16
производ расподела, 12
пројекција, 75
пројекција вектора, 74
простор памти, 38
прстен, 68
прве категорије, 79
псеудо, 38
    информација, 34
    реалност, 72, 75
    скаларни производ, 89, 124
рад, 88
растојање, 76
равноправност, 35
разноврсност, 30
реалност, 37, 44
    релација, 49
рекурзија, 34, 86
релација паралелограма, 73
релације неодређености, 26, 95

реверзибилност, 41
резолуција екрана, 39
резолвента, 98
ротација, 105
ротациона група, 107
садашњост, 37, 66
селективност информације, 18
сепарабилан простор, 82
сфера, 76
симетрично стање, 23
синергија, 28, 45
сингуларан оператор, 97
скалар, 61, 69
скаларни производ, 12
слобода, 56, 70
слободан пад, 90
слободна мрежа, 58
слободне мреже, 36
слободни пад, 35
слободно тржиште, 36
сопствени вектор, 93
специјална ортогонална група, 107
спектар
    екрана, 39
    оператора, 97
спектрална метода, 116
спин, 16, 27, 118
способности, 70
спрега, 11
стандардни модел, 107
стање, 16
статистике, 122
статус кво, 100
степени закон, 36
стојећи таласи, 109
суперпозиција, 28, 109
супремум, 76, 85
свемир, 18
свеобухватност, 42
свет истина, 43
свет лажи, 43
светлосна година, 51
светлост, 29, 45
својствена једначина, 103
својствена вредност, 97, 99, 103
својствене функције, 103
    ортогоналне, 110
својствени потпростор, 99
својствени вектор, 97
свуда густ, 79, 127
свугде густ, 64
ширење свемира, 31, 38
шум, 52
тачка нагомилавања, 78
тачка преокрета, 57
тачке друге врсте, 80
тачке прве врсте, 80
тачно, 20
таласи звука, 108
таласна дужина, 108
таласна функција, 103
    симетрија, 122
таласна једначина, 108
тамна енергија, 62
тамна материја, 16, 31, 50, 62
таутологија, 20
телевизор, 39
тело, 68
тензорски производ, 123
теореме, 18
теорија информације, 34, 59
    дефицит времена, 50
теорија струна, 60
теорија вероватноће, 32
транслација, 105
транспонована матрица, 107
тријадски, 80
тунел ефекат, 113
угаони момент, 89
унитаран оператор, 23
унитарна група, 107
унитарни простор, 69
универзум, 64
универзум информација, 59, 64
унутрашња тачка, 77
унутрашњост, 65, 77
усклађеност, 126
васиона, 21
вектор, 61, 69
    простор, 60, 68
велики прасак, 62
вест, 30
видљиви свемир, 38
виртуелна сфера, 89
    бозона, 52
    фотона, 41

закон инерције, 49
закон одржања, 19, 38, 105
закон великих бројева, 45
затворен скуп, 77
затворена коцка, 81
затворена кугла, 64
здружен, 71
зграда геометрије, 63
животни циклус, 10
животност, 56